

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1901.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique;

Par M. Paul APPELL.

1. Comme nous l'avons montré dans un Mémoire inséré dans le premier fascicule de l'année 1900 de ce Recueil, un système matériel est caractérisé par la fonction

$$S = \frac{1}{2}\sum m J^2,$$

où J désigne l'accélération du point de masse m : en appelant q_1, $q_2, \ldots, q_n$ les paramètres dont les variations virtuelles sont arbitraires, cette fonction S est une fonction du second degré de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ que l'on peut supposer réduite aux seuls termes en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$: les coefficients de cette fonction peuvent dépendre de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et d'autres paramètres dont les variations virtuelles sont des fonctions linéaires et homogènes données des variations de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pour un déplace-

ment virtuel arbitraire imprimé au système, la somme des travaux des forces appliquées est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n.$$

Dès lors les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

M. de Saint-Germain a proposé (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1174; 1900) d'appeler cette fonction S l'*énergie d'accélération*, par analogie avec le nom d'*énergie cinétique* ou *énergie de vitesse* donnée à la demi-force vive T.

Nous nous proposons actuellement de montrer que la fonction S ne peut pas être choisie arbitrairement en fonction des paramètres sous les seules conditions du degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. La fonction S étant supposée connue, nous montrerons comment on peut en déduire les termes correctifs dans les équations de Lagrange; enfin nous donnerons quelques indications sur l'application des méthodes de transformation aux problèmes de dynamique auxquels les équations de Lagrange ne s'appliquent pas.

Nous supposerons, pour simplifier, que les liaisons ne dépendent pas du temps et que les coefficients de S ne contiennent que q_1, $q_2, \ldots, q_n$.

2. D'après l'expression de S donnée dans le précédent Mémoire

$$S = \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

cette fonction est de la forme suivante :

$$(1) \qquad S = \varphi(q''_1, q''_2, \ldots, q''_n) + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \ldots + \psi_n q''_n,$$

où φ est une forme quadratique des q''

$$(2) \qquad \varphi(q''_1, \ldots, q''_n) = \sum a_{ij} q''_i q''_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

dont les coefficients a_{ij} sont supposés dépendre uniquement de q_1, $q_2, \ldots, q_n$, et où $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont des formes quadratiques en q'_1, $q'_2, \ldots, q'_n$ dont les coefficients dépendent aussi de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

La demi-force vive du système

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ dont les coefficients sont les mêmes que ceux de la forme φ, de sorte que

$$(3) \qquad T = \varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) = \sum a_{ij} q'_i q'_j;$$

ce fait résulte du calcul même des deux fonctions S et T. Pour simplifier l'écriture, nous ferons

$$\varphi(q''_1, q''_2, \ldots, q''_n) = \varphi_2,$$
$$\varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) = \varphi_1;$$

alors

$$(4) \qquad \begin{cases} S = \varphi_2 + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \ldots + \psi_n q''_n, \\ T = \varphi_1. \end{cases}$$

5. *Conditions nécessaires que doit remplir* S. — Comme il est facile de le vérifier et comme nous l'avons montré à la fin du précédent Mémoire, on a identiquement

$$(5) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n.$$

Voyons ce que donne cette identité d'après les formes (4) de S et T : elle devient

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & q'_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_2} + \ldots + q'_n \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_n} \\ & \qquad + \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n \\ & = q''_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1} + q''_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_2} + \ldots + q''_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_n} \\ & \qquad + q'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} + \ldots + q'_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}. \end{aligned} \right.$$

Ici le deuxième membre est l'expression développée de $\frac{dT}{dt}$, telle qu'elle résulte de ce fait que T dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Or la première ligne du premier membre de (6) est identique à la première ligne du second, d'après une propriété élémentaire des formes quadratiques. L'identité (6) se réduit donc à

$$(7)\qquad \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_n} q'_n.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient $q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. Elle établit donc des relations nécessaires entre les coefficients des formes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ et les coefficients a_{ij} de φ_1. Pour abréger l'écriture, nous désignerons par une seule lettre les deux membres de l'identité (7), en posant

$$(8)\qquad E = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_n} q'_n = \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n,$$

cette fonction E est une forme cubique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

4. *Termes correctifs dans les équations de Lagrange.* — L'identité (7) étant supposée remplie, cherchons une expression de la différence

$$(9)\qquad \Delta_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial S}{\partial q''_1}.$$

Comme nous avons posé $T = \varphi_1$, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'^2_1} q''_1 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q'_2} q''_2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q'_n} q''_n$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_n} q'_n,$$

car $\frac{\partial T}{\partial q'_1}$ ou $\frac{\partial\varphi_1}{\partial q'_1}$ dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$.

En explicitant la première ligne et tenant compte de l'expression

de E, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) = 2(a_{11}q''_1 + a_{12}q''_2 + \ldots + a_{1n}q''_n) + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q'_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}.$$

D'autre part

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q''_1} = 2(a_{11}q''_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q''_n) + \psi_1.$$

La différence (9) appelée Δ_1 devient donc, après réduction,

$$\Delta_1 = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q'_1} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} - \psi_1.$$

On a de même, en posant

$$\Delta_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q''_\alpha},$$

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q'_\alpha} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} - \psi_\alpha. \tag{10}$$

Ceci posé, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q''_\alpha} = \mathrm{Q}_\alpha.$$

On peut donc les écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_\alpha} = \mathrm{Q}_\alpha + \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

où le terme Δ_α a pour expression la quantité (10). Ces quantités Δ_α forment ce qu'on peut appeler les *termes correctifs* dans les équations de Lagrange. On voit que les équations de Lagrange pourront s'appliquer au système, si ces termes Δ_α sont tous identiquement nuls. Ce fait se produit quand le système considéré est assujetti à des liaisons pouvant toutes être exprimées sous forme finie et que les paramètres

sont de véritables coordonnées : d'après Hertz le système est alors dit *holonôme*.

Si le système n'est pas holonôme, le mouvement du système est le même que celui d'un système holonôme admettant même force vive $2T$ que le premier et sollicité par les forces

$$Q_1 + \Delta_1, \quad Q_2 + \Delta_2, \quad \ldots, \quad Q_n + \Delta_n.$$

Le fait qu'un système non holonôme et un système holonôme peuvent avoir identiquement le même T se trouve démontré sur un exemple simple que nous avons donné dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle*, t. 122, p. 205.

5. *Équations des forces vives : Vérification.* — Les liaisons étant indépendantes du temps, l'équation des forces vives est

$$\frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_n q'_n. \tag{12}$$

Pour déduire cette équation des équations (11) il faut multiplier la première de ces équations par q'_1, la deuxième par q'_2, etc., la dernière par q'_n et ajouter.

On obtient alors l'équation (12), parce qu'on a identiquement

$$\Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \ldots + \Delta_n q'_n = 0. \tag{13}$$

En effet, d'après les expressions (10) des quantités Δ_α et la définition de E [équation (8)], on a

$$\Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \ldots + \Delta_n q_n = q_1 \frac{\partial E}{\partial q'_1} + \ldots + q_n \frac{\partial E}{\partial q'_n} - 3E;$$

mais E étant homogène et du troisième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q_n$, le deuxième membre est nul identiquement, d'après le théorème des fonctions homogènes.

6. *Application des méthodes de transformation.* — Terminons par l'indication d'un problème qui se pose naturellement. Si les com-

posantes des forces $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ dépendent uniquement de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et non des vitesses, les seconds membres des équations du mouvement (11) peuvent contenir néanmoins les vitesses, dans les termes Δ_α, quand le système n'est pas holonôme : ces termes sont du second degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

Peut-on faire disparaître les termes de cette nature en faisant un changement de variables portant sur les paramètres et le temps?

On pourrait, en particulier, essayer une transformation de la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} p_\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \\ dt = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,dt_1 \\ p'_\alpha = \dfrac{dp_\alpha}{dt_1}, \end{cases}$$

où f_α et λ sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, p_α les nouveaux paramètres et t_1 le nouveau temps. D'après un calcul que nous avons fait dans un article : *Sur des transformations de mouvement* (*Journal de Crelle*, t. 110, p. 37), les équations du mouvement (11) prendront la forme

$$(15)\qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial p'_\alpha}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial p_\alpha} = \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=n} R_\alpha^i\,(Q_i + \Delta_i)$$

où Φ_α est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et où les R_α^{i} dépendent uniquement de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On fera dès lors disparaître les dérivées dans les seconds membres, si l'on peut particulariser la transformation de telle façon que l'on ait identiquement

$$(16)\qquad \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=n} R_\alpha^{i}\,\Delta_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces conditions, dont les premiers membres sont des formes quadratiques de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, devant avoir lieu quelles que soient ces dérivées,

on aura, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, un nombre plus grand d'équations définissant les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et λ. Ces équations seront en général trop nombreuses, et le problème ne pourra être résolu que pour des systèmes particuliers.

Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie;

PAR M. EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répetiteur à l'École Polytechnique.

Introduction.

De nombreuses analogies ont déjà été constatées entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis, continus, de transformations de Lie, soit au point de vue de la théorie pure, soit au point de vue des applications.

Dans beaucoup de cas, on est arrivé à pouvoir donner aux théorèmes un énoncé identique, ou qu'on pourrait rendre tel. Sans nous appesantir là-dessus, il nous suffira de renvoyer au *Traité des substitutions* de MM. Jordan et Netto, à la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie (t. I et III), et au *Traité d'Analyse* (t. III) de M. Picard. De pareilles analogies sont évidemment très importantes : elles facilitent l'étude et le perfectionnement simultanés des deux théories et peuvent faire penser qu'il y a d'autres points de ressemblance entre elles. Enfin, comme elles se présentent parfois également avec la théorie des groupes discontinus, elles font espérer (qu'on excuse cette hypothèse peut-être un peu prématurée et bien hardie) qu'on pourra établir un jour, à la base de ces diverses parties des Mathématiques, assez d'idées communes pour qu'un exposé général commun en soit possible ([1]).

([1]) *Comparez* DRACH, *Thèse de Doctorat*. Gauthier-Villars, 1898.

C'est à ce point de vue que nous nous sommes placé dans la rédaction du Mémoire qui suit, composé de trois Notes, et c'est, croyons-nous, une des principales raisons qui peuvent le rendre intéressant (peut-être même important).

Dans une première Note, *Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions*, nous établissons, en nous basant sur des propriétés des groupes échangeables et des sous-groupes facteurs d'un groupe, établies par nous antérieurement, et nous inspirant d'idées de M. Jordan [1], des propriétés de suites de groupes qui sont une extension des suites de composition de Galois et de M. Jordan. Nous établissons en particulier que, dans l'étude de certains groupes, peuvent se présenter des suites de nombres remarquables qui présentent une propriété d'invariance. Ces propriétés s'étendent de suite aux groupes de transformations de Lie.

Dans une deuxième Note, *Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie*, nous étudions les groupes de transformations échangeables. Nous établissons des critériums permettant de reconnaître si deux groupes sont échangeables. Nous montrons, ce que nous n'avons pu établir pour les groupes de substitutions, et ce qui ne serait peut-être pas vrai pour tous ces groupes, que les groupes de Lie à plus d'un paramètre sont toujours décomposables en un produit de deux sous-groupes. *C'est, croyons-nous, le résultat le plus important* [2].

Enfin, nous nous occupons des sous-groupes échangeables d'un groupe transitif en montrant le lien de ces recherches avec la Géométrie et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans une troisième Note, nous revenons sur des définitions de Lie relatives à la transitivité des groupes en les précisant ou les complétant, de façon à pouvoir introduire de nouveaux énoncés semblables à ceux de la théorie des substitutions pour les groupes plusieurs fois transitifs, et nous nous occupons de la classe des groupes transitifs. Nous montrons, par exemple, que le groupe dérivé d'un groupe

---

(1) *Traité des substitutions*, p. 34.

(2) Nous l'avons annoncé dans notre Note du *Bull. de la Soc. math.*, t. XXVIII; 1900.

régulier (*einfach transitiv*) simple et de son conjoint (*reciproke*) est primitif et de classe 1, et nous sommes conduit à des règles semblables à celles de la théorie des substitutions [1] pour la détermination de ce que nous appelons provisoirement sa *classe géométrique* c, qui correspond à la classe des groupes de substitutions et peut remplacer la notion de classe C de Lie, car $c = \varphi(C)$, tout en correspondant à une idée plus précise. C'est là encore, croyons-nous, un résultat très intéressant.

Nous montrons enfin que la notion de classe (ou ordre) d'une transformation a une interprétation géométrique dans la théorie du contact des courbes [2].

PREMIÈRE NOTE.

SUR DES SUITES REMARQUABLES DE SOUS-GROUPES D'UN GROUPE DE SUBSTITUTIONS.

I.

Lemme I. — *Soient* U *et* T *deux groupes échangeables aux groupes* S, Σ_1, Σ_2, ...; U *étant maximum parmi les sous-groupes de* T < T *et échangeables à ces groupes, et* Σ_1, Σ_2, ... *étant contenus dans* S; U_1 *le groupe commun à* S *et* T, V *le groupe commun à* S *et* U, *contenu dans* U_1; u, t, s, u_1, v, *les ordres respectifs de* U, T, S, U_1, V : $B = S \times U$ *est égal à* $A = S \times T$ *ou est un sous-groupe maximum de* A *suivant que* $v < u_1$, *d'où*

$$\frac{t}{u} = \frac{u_1}{v},$$

ou

$$v = u_1.$$

([1]) *Voir* notre Thèse de Doctorat, p. 31, et notre Mémoire du t. XXXII des *Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences.*

([2]) Nous n'oserions affirmer que ce résultat soit nouveau, bien que nous le croyions.

En effet, soient a et b les ordres de A et B,

$$a = \frac{st}{u_1}, \qquad b = \frac{su}{v}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{tv}{uu_1}.$$

1° Soit A = B : on a

$$\frac{t}{u_1} = \frac{u}{v}, \qquad v < u_1.$$

2° Soit A > B; B contient U et U_1, tous deux contenus dans T, mais ne contient pas T; (U, U_1), dérivé de U et de U_1, contient U, est contenu dans T, et est échangeable aux groupes S, Σ_1, Σ_2, ..., car, U_1 étant le groupe commun aux groupes échangeables S et T, est échangeable à S, Σ_1, Σ_2, ... puisque S contient Σ_1, Σ_2, ... auxquels T est échangeable ([1]). Donc $(U, U_1) < T$, par suite $(U, U_1) = U$; U_1 est contenu dans U et

$$U_1 = V, \qquad u_1 = v, \qquad \frac{a}{b} = \frac{t}{u}.$$

Admettons que B ne soit pas maximum dans A, et soit $B < C < A$, C contenant B et étant contenu dans A. Le groupe commun à C et T est W; W contient U qui est contenu dans B, C et T; W ne contient pas T, sans quoi l'on aurait C = A. Donc W contient U et est contenu dans T. De plus, il est échangeable à S, Σ_1, Σ_2, ..., car C et T sont échangeables ([2]), puisque $C \times T = A$; S, Σ_1, Σ_2, ... sont contenus dans C et échangeables à T, par suite au groupe commun W à C et T ([3]). Dès lors, d'après les hypothèses faites, W = U, et

$$C \times T = A, \qquad \frac{ct}{w} = \frac{ct}{u} = a = \frac{st}{u_1} = \frac{st}{v},$$

$$c = \frac{su}{v} = b,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc B est maximum dans A.

([1]) *Voir* notre Note du *Bull. de la Soc. math.*, t. XXVIII, p. 6, prop. 5, 1900, ou notre Mémoire, plus loin, p. 46, prop. 5.

([2]) En effet, (C, T) = A, et toute substitution de A est le produit d'une substitution de T par une de S ou, *a fortiori*, de C.

([3]) *Loc. cit.* (*Bull. de la Soc. math.*, 1900).

LEMME II. — *Soient*

(1) $$E,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1,$$

une suite de groupes tels que chacun soit compris dans le précédent,

(1 *bis*) $$S_1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots,$$

une suite de sous-groupes de E *dont chacun est contenu dans le précédent. Supposons, ce qui est toujours possible, la suite* (1) *déterminée de manière que chacun de ses groupes soit maximum dans le précédent parmi les sous-groupes de ce précédent échangeables à* $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *On peut déterminer au moins une suite*

(2) $$E,\ R_1,\ S_1,\ \ldots,\ X_1,\ Y_1,\ 1,$$

analogue à (1), *contenant* S_1, *dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *échangeable à tous les groupes* (1), *et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes* (1) *et à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *Par suite* (1) *jouit aussi, par rapport à* (2), *de cette dernière propriété.*

Si

(3) $$e,\ r,\ s,\ t,\ \ldots,\ x,\ y,\ 1,$$

(4) $$e,\ r_1,\ s_1,\ t_1,\ \ldots,\ x_1,\ y_1,\ 1$$

sont les ordres respectifs des groupes (1) *et* (2), *les nombres*

(5) $$\frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s}{t},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près que les nombres

(6) $$\frac{e}{r_1},\ \frac{r_1}{s_1},\ \frac{s_1}{t_1},\ \ldots$$

En effet, supposons que le dernier groupe de (1) qui contienne S_1 soit R, et que le premier que S_1 contienne soit V. Soient T_1 le groupe commun à S_1 et S, U_1 le groupe commun à S_1 et T, V_1 le groupe commun à S_1 et U. U_1 est contenu dans T, S, S_1 et, par suite, dans T_1; donc dans le groupe U'_1 commun à T et T_1; réciproquement, U'_1 est contenu dans T_1, S_1, T, par suite dans U_1, et $U'_1 = U_1$: U_1 est le groupe commun à T et T_1. De même V_1 est contenu dans U, T, S_1, U_1 et toute substitution commune à U et U_1 est contenue dans U et S_1, c'est-à-dire dans V_1 : V_1 est donc le groupe commun à U et U_1. T_1, U_1, V_1 contiennent V qui est contenu à la fois dans S_1, S, T, U. Si $V_1 > V$, U contient V_1 qui est échangeable ([1]) aux groupes (1 *bis*) et $V_1 = U$, d'après les hypothèses faites, ce qui est impossible, puisque U n'est pas contenu dans S_1. Donc $V_1 = V$.

Ceci posé, S_1 est échangeable à S, T, U. D'après une propriété connue ([2]), S_1 et S étant échangeables, tout sous-groupe de l'un échangeable à l'autre est échangeable au groupe commun T_1 à S_1 et S; donc T et U, contenus dans S, sont échangeables à T_1; Σ_1, Σ_2, ..., contenus dans S_1, et échangeables à S, sont échangeables à T_1. De même, S_1 et T étant échangeables, et U_1 étant leur groupe commun, U sous-groupe de T échangeable à S_1 est échangeable à U_1, et Σ_1, Σ_2, ..., sous-groupes de S_1 échangeables à T, sont échangeables à U_1. Les groupes

$$(7)\qquad R = S \times S_1,\quad S_1 \times T,\quad S_1 \times U,\quad S_1 = S_1 \times V,\ T_1,\ U_1,\ V$$

sont dès lors tous échangeables à chacun des groupes (1) et à Σ_1, Σ_2, ... Leur nombre est 7 (en général $2\theta + 1$) : leurs ordres respectifs sont

$$(8)\qquad \frac{ss_1}{t_1} = r,\qquad \frac{ts_1}{u_1} = r_1,\qquad \frac{us_1}{v} = r_2,\ s_1,\ t_1,\ u_1,\ v.$$

([1]) En effet, U et S_1 sont échangeables; U est échangeable à Σ_1, Σ_2, ... contenus dans S_1; donc (*Bull. Soc. Math., loc. cit.*, prop. 5) V_1, groupe commun à U et S_1, est échangeable à Σ_1, Σ_2, ...

([2]) *Bull. Soc. Math., loc. cit.*

On a

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{ss_1}{t_1}\dfrac{u_1}{ts_1} = \dfrac{s}{t}\dfrac{u_1}{t_1}, \\ \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{ts_1}{u_1}\dfrac{v}{us_1} = \dfrac{t}{u}\dfrac{v}{u_1}, \\ \dfrac{r_2}{s_1} = \dfrac{u}{v}, \quad \dfrac{s_1}{t_1} = \dfrac{r}{s}, \quad \dfrac{t_1}{u_1}\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{s}{t}, \quad \dfrac{u_1}{v}\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{t}{u}. \end{cases}$$

Or T et T_1 étant échangeables à tous les groupes (1) et (1 *bis*) et contenus dans S, on a

$$T \times T_1 = S \text{ ou } T;$$

de même

$$U \times U_1 = T \text{ ou } U.$$

Si $T \times T_1 = T$, T_1 est commun à T et S_1 et $T_1 = U_1$; si $T \times T_1 = S$, $s = \dfrac{tt_1}{u_1}$ et $T_1 > U_1$. Si $U \times U_1 = U$, U_1 est commun à U et S_1 et $U_1 = V$; si $U \times U_1 = T$, $t = \dfrac{uu_1}{v}$ et $U_1 > V$. On a donc

1° Ou $\qquad t_1 = u_1, \qquad$ ou $\qquad s = \dfrac{tt_1}{u_1};$

2° Ou $\qquad u_1 = v, \qquad$ ou $\qquad t = \dfrac{uu_1}{v}:$

une des quantités $\dfrac{s}{t}\dfrac{u_1}{t_1}$, $\dfrac{t_1}{u_1}$ est $= 1$; de même une des quantités $\dfrac{t}{u}\dfrac{v}{u_1}$, $\dfrac{u_1}{v}$ est $= 1$. Il en résulte que, parmi les six quotients (en général 2θ), $\dfrac{r}{r_1}, \dfrac{r_1}{r_2}, \dots, \dfrac{u_1}{v}$ de chaque nombre (8) par le précédent, le premier ou le cinquième est égal à 1, le deuxième ou le sixième est égal à 1 [plus généralement le $i^{\text{ème}}$ ou le $(\theta + 1 + i)^{\text{ème}}$, avec $i = 1, 2, \dots, \theta - 1$]. Les quotients $\neq 1$ sont précisément les nombres $\dfrac{r}{s}, \dfrac{s}{t}, \dfrac{t}{u}, \dfrac{u}{v}$ dans un certain ordre.

Considérant dès lors la suite

$$(10)\qquad E,\quad R,\quad S'_1,\quad T'_1,\quad U'_1,\quad V,\quad \dots,\quad X,\quad Y,\quad 1,$$

R, S'_1, T'_1, U'_1, V désignant ceux des groupes (7) qui sont distincts, elle jouira de toutes les propriétés que nous voulons établir pour la

suite (2) à condition que chacun de ses groupes soit maximum parmi les sous-groupes du précédent, échangeables à tous ceux de (1) et de (1 *bis*). Démontrons cette dernière propriété.

D'après le lemme I, R, $S_1 \times T$, $S_1 \times U$, $S_1 = S_1 \times V$ sont maxima parmi les sous-groupes du précédent, échangeables à $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, ou coïncident avec ce précédent. Nous allons établir que chacun des groupes S_1, T_1, U_1, V qui n'est pas égal au précédent est maximum parmi les sous-groupes du précédent qui sont échangeables à tous ceux des suites (1) et (1 *bis*).

S_1, T_1, U_1, V sont échangeables à tous les groupes (1) et (1 *bis*).

Soit par exemple $T_1 > U_1$: soit A_1 un sous-groupe de T_1 et S_1 tel que par exemple $T_1 > A_1 > U_1$, A_1 étant échangeable aux groupes (1) et (1 *bis*) et contenant U_1. Le groupe commun B_1 à T et A_1 est compris dans le groupe commun U_1 à T et T_1. D'autre part T et A_1 contiennent U_1; donc $U_1 = B_1$. Enfin T_1 n'est pas contenu dans T, sans quoi on aurait $T_1 = U_1$. On en conclut

$$T_1 \times T \geqq A_1 \times T > U_1 \times T = T,$$

puisque

$$\text{ordre de } A_1 \times T = \frac{a_1 t}{u_1} > t;$$

d'autre part $T_1 \times T > T$, puisque T_1 n'est pas contenu dans T, et $T_1 \times T = S$. On en conclut

$$T < A_1 \times T = S,$$

car $A_1 \times T$ est échangeable aux groupes (1 *bis*) et contenu dans S. Donc

$$s = \frac{tt_1}{u_1} = \frac{ta_1}{u_1}, \qquad a_1 = t_1,$$

contrairement à l'hypothèse. Le groupe A_1 ne peut donc exister, et U_1 est maximum dans T_1. De même pour T_1 et si $V \neq U_1$ pour V.

La suite (10) jouit ainsi de toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé du lemme II pour la suite (2) ([1]).

([1]) Remarquons que le lemme II reste vrai quand on suppose les suites (1) et (2) arrêtées au groupe V; de même pour le lemme IV et les théorèmes I et II.

THÉORÈME I. — *Soient*

$$(11)\qquad E,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1,$$

$$(12)\qquad E,\ R',\ S',\ T',\ U',\ V',\ \ldots,\ X',\ Y',\ 1,$$

deux suites de groupes dont le premier est le même et tels que dans chaque suite chacun soit compris dans le précédent. Supposons que ces deux suites soient telles que chacun de leurs groupes soit maximum dans le précédent parmi les sous-groupes de ce précédent échangeables à tous ceux de l'autre suite. Les nombres

$$(13)\qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s}{t},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près que les nombres

$$(14)\qquad \frac{e}{r'},\ \frac{r'}{s'},\ \frac{s'}{t'},\ \ldots.$$

Nous établirons ce théorème par l'application répétée du lemme II.

Soit S′ le premier des groupes (12) non contenu dans (11). Prenons pour les groupes Σ_1, Σ_2, ... du lemme II les groupes

$$(15)\qquad T',\ U',\ \ldots,\ 1.$$

Nous pourrons former une suite

$$(16)\qquad E,\ R,\ S',\ T_1,\ U_1,\ V_1,\ \ldots,\ 1$$

contenant S′, dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à tous les groupes (11) et (15) et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes (11) et (15). Tous les groupes (11) et (12) jouissent alors par rapport à l'autre suite et à (16) d'une propriété analogue. Les nombres (13) et

$$(17)\qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s'}{t_1},\ \frac{t_1}{u_1},\ \frac{u_1}{v_1},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près.

Nous opérerons sur (16) et (12) comme nous l'avons fait sur (11) et (12) en considérant le premier, U' par exemple, des groupes de (12) non contenus dans (16), et en prenant pour Σ_1, Σ_2, ..., les groupes

$$(18)\qquad V', \quad \ldots, \quad 1$$

de (12).

Nous pourrons former une suite

$$(19)\qquad E, \quad R, \quad S', \quad T_1 = T', \quad U', \quad V_2, \quad \ldots, \quad 1,$$

contenant U', dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à tous les groupes de (16) et (18), et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes de (16) et (18). Les nombres (13), (17) et

$$(20)\qquad \frac{e}{r}, \quad \frac{r}{s'}, \quad \frac{s'}{t'}, \quad \frac{t'}{u'}, \quad \frac{u'}{v_2}, \quad \ldots$$

sont alors les mêmes à l'ordre près.

En continuant de la sorte, nous obtenons des suites (16), (19), etc., dont chacune a ses $n+i$ premiers groupes ($i \geq 1$) communs avec la suite (12) si la précédente a ses n premiers groupes communs avec (12). On finira donc par obtenir parmi elles la suite (12); pour toutes ces suites les nombres (17), (20), etc., sont les mêmes que les nombres (13) à l'ordre près. Donc les nombres (13) sont les mêmes à l'ordre près que les nombres (14). C. Q. F. D.

II.

Il existe d'autres suites analogues à (11) et (12) jouissant de propriétés similaires. Nous allons en signaler de particulièrement remarquables.

Soit la suite

$$(21)\qquad E'', \quad R'', \quad S'', \quad \ldots, \quad X'', \quad Y'',$$

dont chaque groupe est contenu dans le précédent; supposons que ces

groupes soient tous facteurs de E″. On a

$$E'' = R'' \times R''_1 = S'' \times S''_1 = \ldots = Y'' \times Y''_1,$$

$R''_1, S''_1, \ldots, Y''_1$ étant des sous-groupes de $E'' < E''$. Considérons, par exemple,

$$E'' = U'' \times U''_1.$$

D'après une propriété connue ([1]), U'' étant contenu dans R'', on a

$$R'' = U'' \times D_u,$$

D_u étant le groupe commun à R'' et U''_1. Donc U'' est facteur de R'', c'est-à-dire que la suite (21) est telle que chacun de ses groupes est facteur des précédents.

Dès lors, étant donné un groupe E'' décomposable, on pourra toujours déterminer une suite de facteurs de E'' jouissant d'une ou plusieurs propriétés communes, dont chacun est maximum parmi les facteurs du précédent qui jouissent de la propriété ou des propriétés en question. Cette remarque nous permet d'établir le lemme suivant :

Lemme III. — *Soient* U *et* T *deux groupes* (*facteurs de* E) *échangeables aux groupes* (*facteurs de* E) $S, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, U *étant* > 1, *maximum parmi les facteurs de* T (*facteurs de* E) $< T$ *et échangeables à ces groupes, et* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ *étant des facteurs de* S; U_1 *le groupe commun à* S *et* T, V *le groupe commun à* S *et* U, *contenu dans* U_1, u, t, s, u_1, v *les ordres respectifs de* U, T, S, U_1, V : $B = S \times U$ *est égal à* $A = S \times T$ *ou est un facteur maximum de* A *parmi les facteurs de* A (*qui sont facteurs de* E), *suivant que* $\frac{t}{u} = \frac{u_1}{v}$, *ou* $v = u_1$ ([2]).

La démonstration est identique à celle du lemme I; il suffira d'ajouter aux raisonnements déjà faits les remarques suivantes :

On doit supposer $U > 1$; (U, U_1), contenu dans T, est facteur de T,

---

([1]) *Bull. Soc. Math., loc. cit.*, p. 5, prop. 2°.

([2]) On peut, si l'on veut, supprimer les conditions entre parenthèses.

puisque U l'est; C devra être supposé facteur de A. W est facteur de T, puisqu'il contient U facteur de T. Enfin B est facteur de A, car $T = U \times U'$ et $A = B \times U'$.

Lemme IV. — *Soient*

$$(22) \qquad E, \quad R, \quad S, \quad T, \quad U, \quad V, \quad \ldots \quad X, \quad Y, \quad 1$$

une suite de groupes tels que chacun soit facteur de E *et du précédent* [1], $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *une suite de facteurs de* E *n'appartenant pas à* (22), *contenant tous* Y, *et dont chacun est facteur du précédent* [2]. *Supposons, ce qui est toujours possible, la suite* (22) *déterminée de manière que chacun de ses groupes soit maximum dans le précédent parmi les facteurs de* E *et de ce précédent échangeables à* $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *On peut déterminer au moins une suite*

$$(23) \qquad E, \quad R_1, \quad S_1, \quad \ldots, \quad X_1, \quad Y, \quad 1$$

analogue à (22), *contenant* S_1, *dont chaque groupe est facteur de* E *et du précédent, échangeable à tous les groupes* (22) *et à* Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ *et maximum parmi les facteurs de* E *et du précédent échangeables à tous les groupes* (22) *et à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *Par suite* (22) *jouit aussi par rapport à* (23) *de cette dernière propriété.*

Si

$$(24) \qquad e, \quad r, \quad s, \quad t, \quad \ldots, \quad x, \quad y, \quad 1,$$

$$(25) \qquad e, \quad r_1, \quad s_1, \quad t_1, \quad \ldots, \quad x_1, \quad y, \quad 1,$$

sont les ordres respectifs des groupes (22) *et* (23), *les nombres*

$$(26) \qquad \frac{e}{r}, \quad \frac{r}{s}, \quad \frac{s}{t}, \quad \ldots$$

---

[1] Il suffit pour cela que chacun soit contenu dans le précédent et facteur de E, d'après ce qui précède.

[2] Il suffit pour cela que chacun soit sous-groupe du précédent.

sont les mêmes, à l'ordre près, que les nombres

$$(27) \qquad \frac{e}{r_1}, \quad \frac{r_1}{s_1}, \quad \frac{s_1}{t_1}, \quad \ldots$$

La démonstration est identique à celle du lemme II; il suffira d'ajouter aux raisonnements déjà faits les remarques suivantes :

Si $V_1 > V$, V_1 contenu dans U est facteur de U, d'où $V_1 = U$.

Parmi les groupes (7), chacun est facteur des précédents : en effet, ici $V > 1$, puisque V contient Y; V est facteur de E, par suite les groupes (7) sont facteurs de E, et chacun est alors facteur du précédent [1].

De même T_1 est facteur de S, ainsi que U_1.

Enfin d'après le lemme III, dans la suite analogue à (10), R, $S_1 \times T$, $S_1 \times U$, $S_1 = S_1 \times V$ sont maxima parmi les facteurs de E et du précédent échangeables à Σ_1, Σ_2, ..., quand ils ne coïncident pas avec ce précédent.

Il en est de même pour S_1, T_1, U_1, V. A_1 doit être supposé facteur de T_1 et de E (même démonstration).

Théorème II. — *Soient*

$$(28) \qquad E, \quad R, \quad S, \quad T, \quad U, \quad V, \quad \ldots, \quad X, \quad Y, \quad 1,$$

$$(29) \qquad E, \quad R', \quad S', \quad T', \quad U', \quad V', \quad \ldots, \quad X', \quad Y, \quad 1.$$

deux suites de groupes tels que dans chaque suite chacun soit compris dans le précédent, le premier et le dernier groupe > 1 *de chaque suite coïncidant. Supposons que ces deux suites soient telles que chacun de leurs groupes soit maximum dans le précédent parmi les facteurs de* E *et de ce précédent échangeables à tous ceux de l'autre suite.*

Les nombres

$$(30) \qquad \frac{e}{r}, \quad \frac{r}{s}, \quad \frac{s}{t}, \quad \ldots$$

[1] *Bull. Soc. Math.* (*loc. cit.*, prop. 2).

sont les mêmes, à l'ordre près, que les nombres

$$(31) \qquad \frac{e}{r'}, \quad \frac{r'}{s}, \quad \frac{s'}{t'}, \quad \cdots$$

La démonstration est identique à celle du théorème I, à condition de remplacer quand il y a lieu le mot *sous-groupe* par le mot *facteur*, et de s'appuyer sur les lemmes III et IV.

III.

Il nous paraît utile et intéressant de donner des exemples de suites analogues à celles des théorèmes I et II.

1° *Cas du théorème I.* — Considérons le groupe cinq fois transitif R_1 de degré 12 de Mathieu. On pourra former la suite

$$(32) \qquad A_{12}, \quad A_{11}, \quad A_{10}, \quad A_9, \quad A_8, \quad A_7, \quad B_7, \quad 1,$$

des groupes symétriques de degré 12, 11, 10, 9, 8, 7 et du groupe alterné de degré 7 : R_1 est échangeable à chacun de ces groupes. A_{12} est le dernier des groupes (32) qui contienne R_1, et 1 le premier qui y soit contenu. Prenons les groupes communs $C_{11}, C_{10}, C_9, C_8, C_7, D_7$ à R_1 et $A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7, B_7$: la suite

$$(33) \quad A_{12}, \quad R_1 \times B_7, \quad R_1, \quad C_{11}, \quad C_{10}, \quad C_9, \quad C_8, \quad C_7 = 1$$

est telle que chacun de ses groupes est contenu dans le précédent et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes (32). Les suites (13) et (14) deviennent ici, puisque l'ordre de R_1 est 12.11.10.9.8 :

$$\frac{12!}{11!} = 12, \qquad \frac{11!}{10!} = 11, \qquad \frac{10!}{9!} = 10,$$

$$\frac{9!}{8!} = 9, \qquad \frac{8!}{7!} = 8, \qquad \frac{7!}{\frac{1}{2}(7!)} = 2, \qquad \frac{7!}{2},$$

et

$$\frac{12!}{\frac{1}{2}(12!)} = 2, \qquad \frac{\frac{1}{2}(12!)}{12.11.10.9.8} = \tfrac{1}{2}(7!),$$

$$\frac{12.11.10.9.8}{11.10.9.8} = 12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8.$$

D'une manière plus générale, tout groupe au moins deux fois transitif R_1 de degré n donnera lieu à la formation de deux suites analogues. Supposons, par exemple, que R_1 soit contenu dans le groupe alterné B_n et ne soit pas trois fois transitif ([1]). Soient S_1, T_1 les sous-groupes des substitutions de R_1 qui laissent une ou deux mêmes lettres immobiles, de degré $n-1$ et $n-2$: on formera la suite

(34) $$A_n,\quad A_{n-1},\quad A_{n-2},\quad B_{n-2},\quad T_1.$$

Prenons les groupes communs

$$S_1,\quad T_1 \quad \text{et} \quad T_1$$

à R_1, A_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-2} ; la suite

(35) $$A_n,\quad B_n = R_1 \times B_{n-2},\qquad R_1,\quad S_1,\quad T_1$$

correspondra à (34) par application du lemme II si T_1 est maximum ([2]) dans B_{n-2} parmi les sous-groupes de B_{n-2} échangeables à R_1, et alors R_1 sera maximum dans B_n.

De même supposons R_1 maximum dans B_n et partons de la suite (35). Prenons les groupes communs

$$B_{n-1},\quad S_1,\quad T_1$$

([1]) On sait que l'on a toujours des groupes de ce genre quand $n = p + 1$ (p premier).

([2]) Si l'on a un groupe R' deux fois transitif de degré n ne contenant pas le groupe alterné, et si l'on ne peut trouver dans A_n un groupe R_1 deux fois transitif tel que T_1 remplisse ces conditions, R' est contenu dans un sous-groupe trois fois transitif de B_n sur lequel on pourra opérer de même. L'existence connue d'une limite de transitivité montre donc qu'on pourra toujours former des suites analogues à (34) et (35).

à A_{n-1} et B_n, R_1, S_1, T_1; on pourra faire correspondre à (35) par application du lemme II la suite

(36) $$A_n, \quad A_{n-1}, \quad B_{n-1}, \quad S_1, \quad T_1.$$

2° *Cas du théorème II.* — Considérons la suite

(37) $$A_{11}, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad 1,$$

où A_{11} est le groupe symétrique de onze lettres, P_1 un groupe deux fois transitif de degré 11 et de classe 10, d'ordre 11.10, P_2 le groupe transitif d'ordre 11.5 formé des substitutions paires de P_1, P_3 le sous-groupe de P_1 et P_2 d'ordre et de degré 11. En partant du sous-groupe alterné B_{11} de A_{11} on forme d'après le lemme IV la suite

(38) $$A_{11}, \quad B_{11}, \quad P_2, \quad P_3, \quad 1.$$

Remarque I. — Les théorèmes précédents ont une application immédiate dans l'étude de l'abaissement du degré des équations au point de vue du degré des diverses réduites d'une équation donnée ([1]).

Un groupe décomposable donnera toujours naissance à deux suites au moins analogues à celles du lemme II et du théorème I. En effet, soit $E = S \times S_1$ un pareil groupe dont S et S_1 sont des facteurs. On pourra toujours former une suite analogue à (1)

$$E, \quad \ldots, \quad S, \quad \ldots, \quad 1$$

dont tous les groupes sont échangeables à S_1, dès lors une suite

$$E, \quad \ldots \quad S_1, \quad \ldots \quad 1$$

analogue à (2).

Remarque II. — On peut considérer les propriétés suivantes, qui ont sans doute des analogues, comme une extension des suites de composition de M. Jordan. On obtient, par exemple, une propriété de ces suites en ajoutant dans l'énoncé du lemme II et sa démonstration cette

---

([1]) *Voir* par exemple JORDAN, *Traité des Subst.*, et VOGT, *Leçons sur la résotion algébrique des équations*, p. 182, th. III.

condition supplémentaire que les sous-groupes sont invariants dans le groupe E et maxima parmi ceux qui jouissent de cette propriété. Nous n'insistons pas : des conditions supplémentaires convenables donneraient sans doute encore d'autres suites.

Remarque III. — Ce qui précède ne fait pas intervenir, sauf pour les exemples particuliers que nous venons de donner, la notion de degré. Les lemmes et théorèmes précédents sont donc applicables aussi bien aux groupes de substitutions qu'aux groupes d'opérations considérés par divers auteurs, par exemple MM. W. Dyck et Frobenius, en particulier aux groupes finis considérés par exemple par M. Jordan, et qui interviennent dans la théorie des équations différentielles linéaires dont les intégrales sont algébriques.

Nous allons voir qu'ils s'appliquent aussi aux groupes finis continus de transformations de Lie, avec des démonstrations identiques, sous la seule condition de remplacer (1) les quotients $\frac{r}{s}, \frac{s}{t}, \cdots$ par des différences $r-s, s-t, \ldots$.

DEUXIÈME NOTE.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES GROUPES FINIS CONTINUS DE TRANSFORMATIONS (2) DE LIE.

Nous nous proposons ici d'étendre aux groupes finis continus de transformations de Lie, non seulement les propriétés précédentes, mais encore la plupart des propriétés établies par nous pour les groupes de substitutions dans notre Note intitulée (3) : *Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables.* Nous arriverons, d'ailleurs, à des résultats plus complets, et nous établirons en particulier ces théo-

(1) Comparer Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 508.

(2) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, II et III.

(3) *Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Boulogne*, 1899, et *Bull. Soc. Math.*, t. XXVIII, p. 1 et suiv.; 1900. Le théorème ci-dessous est déjà énoncé dans cette dernière Note.

rèmes : 1° *Tout groupe fini continu de transformations de Lie à plus d'un paramètre est décomposable en un produit de deux sous-groupes.* 2° *Tout groupe, dont les sous-groupes sont 2 à 2 échangeables, est intégrable.*

I.

Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1' = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n' = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \end{cases}$$

un groupe D de transformations à r paramètres essentiels (*wesentlich*), qu'on peut définir également par ses r transformations infinitésimales

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_k f &= \sum_1^n \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) p_i, \\ p_i &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous dirons que D est *décomposable* si l'on peut y trouver deux sous-groupes A et B, d'ordre > 1 (l'ordre est égal au nombre des paramètres essentiels), tous deux $<$ D, et tels que toute transformation de D soit le produit d'une transformation a de A par une b de B; on indique cette propriété en écrivant

$$D = A \times B = AB.$$

D sera dit le *produit* de A par B: A et B sont des *facteurs* de D.

De même, si deux groupes A et B sont tels que le groupe dérivé D soit = AB, on dit que A et B sont *échangeables* [1].

II.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que les groupes* A *et* B *entre* $x_1, \ldots, x_n$ *contenant la transformation*

---

[1] Comparer Killing, *Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 57, et Cartan, *Thèse de Doct.*, p. 52 : leur définition de la décomposabilité est différente.

identique [1] *soient échangeables, est que le groupe* D = (A, B), *dérivé de* A *et* B, *n'ait d'autres transformations infinitésimales que celles de la forme* E + E', *si* E *et* E' *sont les formes les plus générales des transformations infinitésimales de* A *et* B.

Je dis que la condition est nécessaire.

En effet, si D = A × B, D contient la transformation E + E', qui est le produit de E par E'. D ne contient pas d'autre transformation infinitésimale; car, si ab est l'une d'elles, a étant une transformation finie de A par une b de B également finie, il existe une transformation α de B infiniment peu différente de b et telle que $a\alpha = 1$; a appartient à B, ainsi que ab qui est de la forme E'.

Je dis que la condition est suffisante.

En effet, la transformation infinitésimale la plus générale de D est E + E'. Considérons un isomorphe holoédrique régulier [2] Y (*einfach transitiv*) de D : au sous-groupe B de D correspond dans Y un sous-groupe Y_2 : à Y_2 correspond une division de l'espace

$$v_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad v_\zeta = \text{const.}$$

(ρ, r_1, r_2 ordres de D, A, B, $\zeta = \rho - r_2$) que Y laisse invariable et telle que Y_2 soit formé de l'ensemble des transformations de Y laissant invariable une multiplicité générale M de cette division [3]. Au sous-

---

(1) Nous ne considérerons dans tout ce qui suit que des groupes contenant la transformation identique.

(2) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, p. 404 par exemple et p. 378 et suiv.

(3) Il ne nous paraît pas inutile de donner une démonstration directe de cette propriété, sans renvoyer à l'Ouvrage de Lie.

Y est régulier; soient

$$(\alpha) \qquad x'_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_\rho; b_1, \ldots, b_\rho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

les équations de Y. On peut toujours choisir les paramètres de façon que Y_2 soit défini en attribuant à $b_1, \ldots, b_\zeta$, où $\zeta = \rho - r_2$, des valeurs déterminées $c_1, \ldots, c_\zeta$. Y étant régulier, (α) peut être résolu par rapport à $b_1, \ldots, b_\rho$, ce qui donne

$$(\beta) \qquad u_1 = b_1, \qquad \ldots, \qquad u_\zeta = b_\zeta, \qquad \ldots, \qquad u_\rho = b_\rho.$$

Les ζ premières équations définissent une multiplicité M à $\rho - \zeta = r_2$ degrés

groupe A d'ordre r_1 de D correspond dans Y un sous-groupe Y_1 ayant en commun avec Y_2 exactement $r_1 + r_2 - \rho$ transformations infinitésimales indépendantes, puisque les transformations infinitésimales in-

---

de liberté, quand on donne aux x'_i les valeurs des coordonnées d'un point quelconque Π_1 déterminé de position générale et à $b_1, \dots, b_\zeta$ les valeurs $c_1, \dots, c_\zeta$. M contient Π_1, car la transformation identique est contenue dans Y_2 et correspond à des valeurs des b_j, telles que $b_1 = c_1, \dots, b_\zeta = c_\zeta$, $b_{\zeta+1} = \gamma_{\zeta+1}, \dots, b_\rho = \gamma_\rho$, et les coordonnées de Π_1 satisfont aux équations de M

$$(\gamma) \qquad u_1 = c_1, \quad \dots, \quad u_\zeta = c_\zeta.$$

Quand on donne aux x'_i les valeurs des coordonnées de Π_1 et à $b_1, \dots b_\zeta$ les valeurs $c_1, \dots, c_\zeta$, (β) devient

$$(\delta) \qquad u_1 = c_1, \quad \dots, \quad u_\zeta = c_\zeta, \quad u_{\zeta+1} = b_{\zeta+1}, \quad \dots, \quad u_\rho = b_\rho.$$

(δ) représente, si l'on donne à $b_{\zeta+1}, \dots, b_\rho$ toutes les valeurs possibles, l'ensemble des points auxquels Π_1 est substitué par Y_2, ou, puisque Y_2 forme un groupe, l'ensemble des points que Y_2 substitue à Π_1. Ces points, pour la même raison, sont permutés exclusivement entre eux par Y_2, c'est-à-dire que (δ) est invariant par Y_2. Mais les ensembles de points (γ) et (δ) coïncident; toute transformation de Y_2 remplace alors (γ) par un système équivalent qui donne encore, entre les x_i, ζ relations ne contenant aucune constante arbitraire : donc (γ) est invariant par Y_2.

Toute transformation de Y non comprise dans Y_2 ne peut laisser (γ) et (δ) invariants, car elle remplace Π_1 par un point que Y_2 ne substitue pas à Π_1, c'est-à-dire non compris dans (γ) et pour lequel $u_1, \dots, u_\zeta$ prennent un système de valeurs $\neq c_1, \dots, c_\zeta$.

Opérons sur (γ) une transformation (α); on obtient

$$w_k(x'_1, \dots, x'_n; b_1, \dots, b_\rho) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, \zeta).$$

Si ces équations dépendent de τ_1 paramètres arbitraires, indépendants, elles peuvent s'écrire

$$V_k(x'_1, \dots, x'_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{\tau_1}) = 0$$

ou

$$\alpha_1 = V_1, \quad \dots, \quad \alpha_{\tau_1} = V_{\tau_1}.$$

Le sous-groupe des transformations de Y laissant 1 multiplicité générale invariable est d'ordre $\rho - \tau_1 = r_2$ et $\tau_1 = \zeta$.

L'ensemble des multiplicités V_k (LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 488, par exemple) est invariant par Y et forme une division de l'espace $x_1, \dots, x_n$ invariante par Y; deux multiplicités de cette division n'ont aucun point de position générale commun. On le vérifierait facilement.

dépendantes de D, en nombre ρ, sont toutes de la forme $E + E'$. L'ordre du sous-groupe des transformations de Y_1 laissant M immobile est $r_1 + r_2 - \rho$, et Y_1 opère entre les multiplicités $v_1 = \text{const.}, \ldots, v_\zeta = \text{const.}$ les transformations d'un groupe transitif.

Ceci posé, soient S_1 et S_2 deux transformations de Y remplaçant M_1 par M, M et M_1 étant deux multiplicités générales v (*allgemein* ou *allgemeiner Lage*) : la transformation $S_2^{-1} S_1$ laisse M immobile et est de la forme y_2, y_2 étant une transformation de Y_2; donc

$$S_1 = S_2 y_2.$$

On peut toujours choisir pour S_2 une transformation de Y_1 qui est transitif entre les v : dès lors toute transformation de Y est le produit d'une transformation de Y_1 par une de Y_2. Y étant holoédriquement isomorphe à D et les groupes correspondant aux sous-groupes Y_1 et Y_2 de Y dans D étant A et B, toute transformation de D est de la forme ab, a étant une transformation de A, b une de B.

Remarque. — On verrait de la même manière que la même condition est nécessaire et suffisante pour que $D = BA$. Donc, si $D = AB$, on a en même temps $D = BA$, et réciproquement.

On voit en même temps que l'ordre ρ de D est $r_1 + r_2 - m$, m étant l'ordre $r_1 + r_2 - \rho$ du groupe commun à A et B.

Réciproquement, supposons que le groupe D dérivé de A et B soit d'ordre $r_1 + r_2 - m$, m étant l'ordre du groupe commun à A et B; toutes les transformations infinitésimales de D sont de la forme $E + E'$, car on pourra toujours supposer que parmi les transformations de base de E' on ait pris m transformations infinitésimales indépendantes du groupe commun, et l'on a $r_1 + r_2 - m$ transformations infinitésimales indépendantes de la forme $E + E'$. Donc A et B sont échangeables; d'où :

THÉORÈME II. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que les deux groupes* A *et* B *à* r_1 *et* r_2 *paramètres soient échangeables, est que le groupe* D *dérivé de* A *et* B *soit à* $r_1 + r_2 - m$ *paramètres,* m *étant l'ordre du sous-groupe* C *des transformations communes à* A *et* B.

III.

Décomposabilité [1] des groupes de transformation.

1° *Groupes primitifs composés.*

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme. — *Tout sous-groupe invariant* K *d'un groupe primitif* G *est transitif* [2].

En effet, soient $X_1, \ldots, X_r$ les transformations infinitésimales indépendantes de G, $X_1, \ldots, X_m$ les transformations infinitésimales indépendantes de K.

Si K n'est pas transitif, il a des invariants [3] $\Omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Omega_t(x_1, \ldots, x_n)$ qui sont les solutions du système d'équations différentielles

$$(3) \qquad X_1 = 0, \quad \ldots \quad X_m = 0.$$

Admettons que $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ soit un système de solutions indépendantes de (3), c'est-à-dire que toute autre solution de (3) est fonction de $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$. Les transformations de G étant permutables [4] à K le transforment en lui-même et transforment $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ en des solutions de (3), c'est-à-dire en des fonctions de $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$, puisqu'elles transforment $X_1, \ldots, X_m$ en des fonctions linéaires à coefficients constants de $X_1, \ldots, X_m$. Donc le système d'équations

$$\Omega_1 = \text{const.}, \quad \ldots \quad \Omega_t = \text{const.}$$

forme une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ invariable par le groupe G, qui n'est pas primitif [5].

---

(1) La signification de ce mot ne nous paraît pas avoir besoin d'être expliquée.

(2) *Comparer* Jordan, *Traité des subst.*, p. 41.

(3) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 215.

(4) C'est-à-dire que $g^{-1}kg = k_1$, g étant une transformation de G, k et k_1 des transformations de K, quels que soient g et k.

(5) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 220.

Ce lemme établi, supposons que le groupe primitif G contienne un sous-groupe invariant K < G. Soit H le sous-groupe des transformations de G laissant un point P_0 de position générale (*Punkt von allgemeiner Lage*) ([1]) invariable; G possède exactement ([2]) n transformations infinitésimales indépendantes d'ordre o, dont aucune fonction linéaire à coefficients constants ne laisse P_0 immobile, et $r-n$ d'ordre $>$ o, engendrant H et laissant P_0 immobile. De même, K, qui est transitif, d'après le lemme précédent, possède exactement n transformations infinitésimales indépendantes d'ordre o dont aucune fonction linéaire ne laisse P_0 immobile, et $m-n$ d'ordre $>$ o laissant P_0 immobile, si m est l'ordre de K. D'après le théorème II, on a

$$G = H \times K.$$

Donc :

Théorème. — *Tout groupe primitif composé est décomposable.*

2° *Groupes composés quelconques.*

Soient G un pareil groupe, H un sous-groupe invariant maximum de G :

α. Si l'on peut trouver un sous-groupe invariant H′ de G non contenu dans H, on a

$$G = H \times H',$$

car si $X_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ sont m transformations infinitésimales indépendantes de H supposé d'ordre m, $X'_k (k = 1, 2, \ldots, m')$ m' transformations infinitésimales de H′ supposé d'ordre m', $(X_i X_j)$, $(X'_k X'_l)$, $(X_i X'_k)$ sont des fonctions linéaires des X et des X′, et toute transformation infinitésimale du groupe dérivé de H et de H′, qui est G, est de la forme $E + E'$, E et E′ étant des transformations infinitésimales de H et H′; en sorte que $G = H \times H'$ (théorème I).

β. Si H est à la fois maximum dans G et invariable par les transfor-

---

([1]) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 203 et 498.

([2]) *Ibid.*, p. 203.

mations de G, on a encore

$$G = H \times H'.$$

H' étant un sous-groupe quelconque de G non contenu dans G, sous-groupe qui existe ici toujours. Ainsi, quand le groupe dérivé de G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des crochets $(X_i X_k)$ de G, $X_1, \ldots, X_r$ étant r transformations infinitésimales indépendantes de G, d'ordre r, est d'ordre $< r$, on sait [1] que G contient un sous-groupe invariant d'ordre $r-1$ qu'on peut prendre pour H; on prendra pour le second facteur H' le groupe engendré par une transformation infinitésimale de G non contenue dans H.

Nous avons obtenu ainsi des modes de décomposition de certains groupes. Ce ne sont là que des cas particuliers : nous allons voir que tout groupe fini continu de transformations de Lie à plus d'un paramètre est décomposable.

3° *Groupes quelconques.*

1. Groupes simples. — Il nous suffira d'étudier les diverses catégories de groupes simples connus [2], en remarquant que, si un groupe est décomposable, tous ses isomorphes holoédriques le sont. Nous conservons ici les notations de M. Cartan.

α. *Type A* [3]. — Le groupe général de ce type a $l(l+2)$ paramètres : il est isomorphe holoédriquement au groupe linéaire homogène spécial de l'espace à $l+1$ dimensions, ou encore [4] au groupe projectif général G de l'espace à l dimensions. Ce dernier contient [5] un sous-groupe H à $l(l+1)$ paramètres engendré par les transforma-

---

[1] *Voir*, par exemple, Cartan, *Thèse de Doctorat*, p. 19; Nony et Cie, 1894; ou Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 261.

[2] Cartan, *loc. cit.*, p. 94.

[3] *Ibid.*, p. 82.

[4] Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 558.

[5] Nous adoptons les notations de Lie, *ibid.*, p. 555.

tions infinitésimales

$$P_i = x_i \sum_1^l {}_k x_k p_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots l),$$

$$T_{ik} = x_i p_k,$$

et un sous-groupe H' engendré par les transformations infinitésimales p_i. D'après le théorème II, on a

$$G = H + H'.$$

β. *Type B* (¹). — Le groupe général de ce type a $l(2l+1)$ paramètres et est isomorphe holoédriquement au groupe linéaire et homogène G de l'espace à $2l+1$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

(4)
$$X_{ik} = x_k p_{-i} - x_i p_{-k} = T_{k,-i} - T_{i,-k}$$
$$(i \neq k, \qquad i, k = 0, \pm 1, \ldots, \pm l).$$

On sait que (²)

$$(T_{ik} T_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{\nu} T_{i\mu k}$$
$$(\varepsilon_{\rho\theta} = 0 \quad \text{si} \quad \rho \neq \theta \qquad \text{et} \qquad = 1 \quad \text{si} \quad \rho = \theta),$$

d'où

$$\begin{aligned}(X_{ik} X_{\nu\mu}) &= (T_{k,-i} - T_{i,-k}, T_{\mu,-\nu} - T_{\nu,-\mu}) \\ &= (T_{k,-i} T_{\mu,-\nu}) - (T_{k,-i} T_{\nu,-\mu}) - (T_{i,-k} T_{\mu,-\nu}) + (T_{i,-k} T_{\nu,-\mu}) \\ &= \varepsilon_{-i,\mu} T_{k,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,k} T_{\mu,-i} - (\varepsilon_{-i,\nu} T_{k,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,k} T_{\nu,-i}) \\ &\quad - (\varepsilon_{-k,\mu} T_{i,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,i} T_{\mu,-k}) + (\varepsilon_{-k,\nu} T_{i,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,i} T_{\nu,-k}) \\ &= \varepsilon_{-i,\mu}(T_{k,-\nu} - T_{\nu,-k}) + \varepsilon_{-k,\nu}(T_{i,-\mu} - T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,k}(T_{\nu,-i} - T_{i,-\nu}) \\ &\quad + \varepsilon_{-\nu,i}(T_{\mu,-k} - T_{k,-\mu}),\end{aligned}$$

puisque, par exemple,

$$\varepsilon_{-i,\mu} = \varepsilon_{-\mu,i}.$$

(¹) CARTAN, *loc. cit.*, p. 82-83.

(²) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 555.

On en conclut

$$(5)\qquad (X_{ik}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-i,\mu}X_{\nu k} + \varepsilon_{-k,\nu}X_{\mu i} + \varepsilon_{-\mu,k}X_{i\nu} + \varepsilon_{-\nu,i}X_{k\mu}.$$

Donnant, dans cette formule, à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l$, $-1, \ldots, -(l-1)$, on voit que les crochets des transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ s'expriment en fonction linéaire de ces transformations et forment [1] un groupe H_1 à $2l-1+(2l-1)(l-1) = l(2l-1)$ paramètres.

De même, si nous donnons à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l-1$, $-1, \ldots, -l$, nous obtenons un groupe H_2 à $l(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (5) posons $i=l$, $k=-l$, $\mu, \nu \neq -l$: on a

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-l,\mu}X_{\nu,-l} + \varepsilon_{l\nu}X_{\mu l} + \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu} + \varepsilon_{-\nu,l}X_{-l,\mu},$$

avec

$$\varepsilon_{-l,\mu}=0, \qquad \varepsilon_{-\nu,l}=0,$$

d'où

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{l\nu}X_{\mu l} + \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu}.$$

On voit que le groupe H_1 est invariant par la transformation $X_{l,-l}$ et forme avec H_1 un groupe H à $l(2l-1)+1$ paramètres.

Ceci posé, considérons les deux groupes H et H_2 et une des transformations (4), X_{pq}. Celle-ci sera contenue dans H si l'on n'a pas p ou q égal à $-l$, ou si l'on a en même temps p ou q égal à $-l$ et q ou p égal à l : elle sera contenue dans H_2 si l'on n'a pas p ou q égal à l; elle sera donc toujours contenue dans l'un de ces deux groupes. Alors toute transformation infinitésimale de G est la somme d'une transformation infinitésimale de H et d'une de H_2 : d'après le théorème II, on a

$$G = H \times H_2.$$

γ. *Type C* [2]. — Le groupe général G de ce type a $l(2l+1)$ paramètres et est holoédriquement isomorphe au groupe linéaire et homo-

[1] Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 158.

[2] Cartan, *loc. cit.*, p. 85. Pour simplifier les raisonnements, nous modifions un peu les notations de M. Cartan.

gène de l'espace à $2l$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

$$
\begin{aligned}
-X_{ik} &= \varepsilon_i x_i p_{-k} + \varepsilon_k x_k p_{-i} \qquad (i, k = \pm 1, \ldots, \pm l),\\
-X_{ii} &= 2\varepsilon_i x_i p_{-i} \qquad\qquad\qquad (i \neq k),
\end{aligned}
$$

avec $\varepsilon_i = +1$ ou -1 suivant que i est positif ou négatif.

Ce groupe présente une très grande analogie avec celui du type B; on a

$$
\begin{aligned}
(X_{ik}X_{\nu\mu}) &= (\varepsilon_i T_{i,-k} + \varepsilon_k T_{k,-i},\ \varepsilon_\nu T_{\nu,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-\nu})\\
&= \varepsilon_i\varepsilon_\nu(T_{i,-k}T_{\nu,-\mu}) + \varepsilon_k\varepsilon_\nu(T_{k,-i}T_{\nu,-\mu})\\
&\quad + \varepsilon_i\varepsilon_\mu(T_{i,-k}T_{\mu,-\nu}) + \varepsilon_k\varepsilon_\mu(T_{k,-i}T_{\mu,-\nu})\\
&= \varepsilon_i\varepsilon_\nu(\varepsilon_{-k,\nu}T_{i,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,i}T_{\nu,-k}) + \varepsilon_k\varepsilon_\nu(\varepsilon_{-i,\nu}T_{k,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,k}T_{\nu,-i})\\
&\quad + \varepsilon_i\varepsilon_\mu(\varepsilon_{-k,\mu}T_{i,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,i}T_{\mu,-k})\\
&\quad + \varepsilon_k\varepsilon_\mu(\varepsilon_{-i,\mu}T_{k,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,k}T_{\mu,-i})\\
&= \varepsilon_{-k,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_\nu T_{i,-\mu} - \varepsilon_k\varepsilon_\mu T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,i}(\varepsilon_k\varepsilon_\mu T_{k,-\nu} - \varepsilon_i\varepsilon_\nu T_{\nu,-k})\\
&\quad + \varepsilon_{-i,\nu}(\varepsilon_k\varepsilon_\nu T_{k,-\mu} - \varepsilon_i\varepsilon_\mu T_{\mu,-k})\\
&\quad + \varepsilon_{-\mu,k}(\varepsilon_i\varepsilon_\mu T_{i,-\nu} - \varepsilon_k\varepsilon_\nu T_{\nu,-i}).
\end{aligned}
$$

Or on a

$$
\varepsilon_{-k,\nu} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq -\nu, \qquad \text{et} \qquad = 1 \quad \text{si} \quad k = -\nu;
$$

dans ce dernier cas,

$$
\varepsilon_k = \varepsilon_{-\nu} = -\varepsilon_\nu.
$$

Donc

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
(X_{ik}X_{\nu\mu}) &= \varepsilon_{-k,\nu}\varepsilon_\nu(\varepsilon_i T_{i,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,i}\varepsilon_\mu(\varepsilon_k T_{k,-\nu} + \varepsilon_\nu T_{\nu,-k})\\
&\quad + \varepsilon_{-i,\nu}\varepsilon_\nu(\varepsilon_k T_{k,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-k})\\
&\quad + \varepsilon_{-\mu,k}\varepsilon_\mu(\varepsilon_i T_{i,-\nu} + \varepsilon_\nu T_{\nu,-i})\\
&= -(\varepsilon_{-k,\nu}\varepsilon_\nu X_{i\mu} + \varepsilon_{-\mu,i}\varepsilon_\mu X_{k\nu} + \varepsilon_{-i,\nu}\varepsilon_\nu X_{k\mu} + \varepsilon_{-\mu,k}\varepsilon_\mu X_{i\nu}).
\end{aligned}
\right.
$$

Cette égalité a d'ailleurs lieu même si l'on a

$$
k = i \quad \text{ou} \quad \nu = \mu.
$$

Ceci posé, donnons dans (6) à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, l, -1, \ldots, -(l-1)$: les crochets des transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ s'expriment en fonction linéaire de ces transformations et forment un groupe H_1 à $l(2l-1)$ paramètres.

De même, si nous donnons à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l-1, -1, \ldots, -l$, nous obtenons un groupe H_2 à $l(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (6), posons $i = l$, $k = -l$, $\mu, \nu \neq -l$; on a

$$(X_{l,-l} X_{\nu\mu}) = -(\varepsilon_{l\nu}\varepsilon_\nu X_{l\mu} + \varepsilon_{-\mu,l}\varepsilon_\mu X_{-l,\nu} + \varepsilon_{-l,\nu}\varepsilon_\nu X_{-l,\mu} + \varepsilon_{-\mu,-l}\varepsilon_\mu X_{l\nu}),$$

avec

$$\varepsilon_{-\mu,l} = 0, \qquad \varepsilon_{-l,\nu} = 0,$$

d'où

$$(X_{l,-l} X_{\nu\mu}) = -(\varepsilon_{l\nu}\varepsilon_\nu X_{l\mu} + \varepsilon_{-\mu,-l}\varepsilon_\mu X_{l\nu}).$$

On voit que le groupe H_1 est invariant par $X_{l,-l}$ et forme avec H_1 un groupe H à $l(2l-1)+1$ paramètres.

On en conclut encore comme pour le type B que

$$G = H \times H_2,$$

en vertu du théorème II.

6. *Type D* (¹). — Le groupe général G de ce type a $l(2l-1)$ paramètres et est holoédriquement isomorphe au groupe linéaire et homogène de l'espace à $2l$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

$$X_{ik} = x_k p_{-i} - x_i p_{-k} = T_{k,-i} - T_{i,-k}$$
$$(i \neq k,\ i, k = \pm 1, \ldots, \pm l).$$

On a

$$(X_{ik} X_{\nu\mu}) = (T_{k,-i} - T_{i,-k},\ T_{\mu,-\nu} - T_{\nu,-\mu});$$

d'où, comme pour le type B [formule (5)],

(7) $$(X_{ik} X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-i\mu} X_{\nu k} + \varepsilon_{-\mu,k} X_{i\nu} + \varepsilon_{-k,\nu} X_{\mu i} + \varepsilon_{-\nu,i} X_{k\mu}.$$

(¹) CARTAN, *loc. cit.*, p. 85.

On voit encore que, si l'on donne à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, l$, $-1, \ldots, -(l-1)$, les transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ forment un groupe H_1 à $(l-1)(2l-1)$ paramètres.

De même, si l'on donne à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, (l-1)$, $-1, \ldots, -l$, les transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ forment un groupe H_2 à $(l-1)(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (7), posons $i = l$, $k = -l$, $\mu, \nu \neq -l$; on a

$$(X_{l,-l} X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-l,\mu} X_{\nu,-l} + \varepsilon_{-\mu,-l} X_{l\nu} + \varepsilon_{l\nu} X_{\mu l} + \varepsilon_{-\nu,l} X_{-l,\mu},$$

avec

$$\varepsilon_{-l,\mu} = 0, \qquad \varepsilon_{-\nu,l} = 0;$$

d'où

$$(X_{l,-l} X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-\mu,-l} X_{l\nu} + \varepsilon_{l\nu} X_{\mu l}.$$

H_1 est donc invariant par $X_{l,-l}$, qui forme avec H_1 un groupe H. On a encore, d'après le théorème II,

$$G = H \times H_2.$$

ε. *Type E.* — Un groupe G de ce type a $r = 78$, 133 ou 248 paramètres; examinons ces trois cas successivement.

Soit $r = 78$. La structure est donnée par les formules (37), p. 90, de la Thèse [1] de M. Cartan, les crochets non écrits étant tous nuls. On remarquera que les transformations infinitésimales X_{ii}, X_{ik}, X_{ijk}, X_{000} sont telles que leurs crochets 2 à 2 sont des fonctions linéaires de ces transformations. Elles engendrent donc un groupe H qui a 57 paramètres. De même, les transformations X_{ii}, X_{ik}, X'_{ijk}, X_{000} engendrent un groupe H' à 57 paramètres. Toute transformation infinitésimale de G étant la somme d'une transformation de H et d'une de H', on a, d'après le théorème II,

$$G = H \times H'.$$

Soit $r = 133$. La structure est donnée par les formules (40), page 91, de la Thèse de M. Cartan. On voit encore que les transformations X_{ii},

---

(1) *Voir* aussi p. 142 et suiv. pour les trois valeurs de r.

X_{ik}, X_{ijk}, X'_{00i} engendrent un groupe H à 91 paramètres; de même, les transformations X_{ii}, X_{ik}, X'_{ijk}, X_{00i} engendrent un groupe H′ à 91 paramètres, et

$$G = H \times H'.$$

Soit $r = 248$. La structure est donnée par les formules (41), page 92, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations X_{ii}, X_{ik} avec $i \neq 0$, X_{ijk} avec $i, j, k \neq 0$, $X'_{\rho\sigma\tau}$ (ρ, σ ou $\tau = 0$) engendrent un groupe H à 156 paramètres. De même, les transformations X_{ii}, X_{ik} avec $k \neq 0$, X'_{ijk} avec $i, j, k \neq 0$, $X_{\rho\sigma\tau}$ (ρ, σ ou $\tau = 0$) engendrent un groupe H′ à 156 paramètres. On a

$$G = H \times H'.$$

ζ. *Type F.* — Un groupe G de ce type a 52 paramètres. La structure est donnée par les formules (42), page 92, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations $Y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $X_i (i \neq 4)$, $X_{ik} (i, k \neq 4)$, $X_{\alpha\delta\gamma\delta} (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 4)$ engendrent un groupe H à 37 paramètres. De même, les transformations $Y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $X_i (i \neq -4)$, $X_{ik} (i, k \neq -4)$, $X_{\alpha\delta\gamma\delta} (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq -4)$ engendrent un groupe H′ à 37 paramètres. Toute transformation infinitésimale de G de la forme X_i, X_{ik}, $X_{\alpha\delta\gamma\delta}$ qui contient l'indice $+4$ ou l'indice -4 est contenue dans l'un de ces deux groupes, car $+4$ et -4 ne peuvent être à la fois indices d'une même transformation. On en conclut, en vertu du théorème II,

$$G = H \times H'.$$

η. *Type G.* — Un groupe G de ce type a 14 paramètres. La structure est donnée par les formules (43), page 93, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations X_{0i}, X_{0j}, X_{k0}, X_{kj}, X_{ki}, X_{ij}, X_{kk}, X_{ii} (i, j, k différents et $= 1, 2, 3$ respectivement dans un ordre quelconque) engendrent un groupe H à 8 paramètres. De même, les transformations X_{i0}, X_{j0}, X_{0k}, X_{jk}, X_{ik}, X_{ji}, X_{kk}, X_{ii} engendrent un groupe H′ à 8 paramètres. On a

$$G = H \times H'.$$

On en conclut :

Théorème. — *Tout groupe simple fini continu de transformations de Lie qui a plus d'un paramètre est décomposable.*

2. Groupes composés quelconques. — Soit G un groupe composé quelconque qu'on peut toujours supposer ici régulier, H un sous-groupe invariant maximum de G. Si $u_1, \ldots, u_m$ forment un système d'invariants de H indépendants, G opère entre les multiplicités

$$u_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_m = \text{const.}$$

les transformations d'un groupe G_1 transitif à m variables (¹) isomorphe à G. H étant invariant dans G laisse invariable chacune de ces multiplicités, et G_1 a m paramètres essentiels, le sous-groupe de G_1 qui correspond à H se réduisant à la transformation identique. A tout sous-groupe K de G à $r - m + k$ paramètres contenant H correspond dans G_1 un sous-groupe K_1 à k paramètres, et, réciproquement, à tout sous-groupe K_1 de G_1 à k paramètres on peut faire correspondre dans G un sous-groupe à $r - m + k$ paramètres.

G_1 est simple; en effet, sinon il contiendrait un sous-groupe L_1 invariant à l paramètres auquel correspondrait dans G un sous-groupe L à $r - m + l$ paramètres contenant H. L ne serait pas invariant dans G, d'après l'hypothèse faite sur H, et serait transformé par G en un autre groupe $L' \neq L$, auquel correspondrait dans G_1 le même groupe L_1 : au groupe (L, L') dérivé de L et de L', et qui a plus de $r - m + l$ paramètres, correspondrait dans G_1 le groupe L_1 à l paramètres, ce qui est impossible.

G_1 étant simple est décomposable, et l'on peut y trouver deux sous-groupes F_1 et Φ_1 tels que

$$G_1 = F_1 \times \Phi_1.$$

On en conclut

$$G = F \times \Phi,$$

F et Φ étant les sous-groupes de G contenant H et correspondant à F_1 et Φ_1 respectivement; car, si F_1 a f paramètres, Φ_1 φ paramètres, on a $m = f + \varphi - \delta$, δ étant l'ordre du groupe commun à F_1 et Φ_1. F et Φ ont $r - m + f$ et $r - m + \varphi$ paramètres, et un groupe d'ordre $r - m + \delta$

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 481.

commun, contenant H. On a

$$r - m + f + r - m + \varphi - (r - m + \delta) = r;$$

le groupe dérivé de F et Φ coïncide avec G et

$$G = F \times \Phi,$$

d'après le théorème II. Donc :

Théorème. — *Tout groupe fini continu de transformations de Lie composé est décomposable, quand il a au moins deux paramètres.*

Finalement, nous en concluons :

Théorème III. — *Tout groupe fini continu de transformations de Lie, simple ou non, est décomposable* (¹), *quand il a au moins deux paramètres.*

Ce théorème conduit à étudier les divers modes de décomposition d'un groupe donné (²). On peut dire à ce sujet :

Théorème IV. — *Le problème de la recherche des sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques et transitifs d'un groupe donné est compris dans celui de la recherche des décompositions de ce groupe en un produit de deux sous-groupes, et lui est équivalent quand ce groupe est simple.*

En effet, soient G un isomorphe holoédrique et transitif d'un groupe donné Γ, K un sous-groupe transitif de G. D'après le théorème II,

---

(¹) Il en résulte notamment la possibilité de former de proche en proche tous les groupes de transformations en adjoignant aux groupes déjà formés des groupes qui leur sont échangeables.

(²) Nous n'y insistons pas : ce sujet appelle bien des recherches; une pareille étude, faite pour tout ou partie des groupes connus, peut faire un sujet de thèse.

a $G = K \times H$, H étant le sous-groupe des transformations de G laissant un point de position générale immobile.

Supposons, en particulier, Γ simple : soit $\Gamma = F \times \Phi$. On peut toujours trouver, en passant par l'intermédiaire d'un isomorphe régulier de Γ, un isomorphe holoédrique et transitif G de Γ, tel que le sous-groupe des transformations de G laissant un point de position générale immobile soit le sous-groupe de G correspondant à Φ dans Γ. Il en résulte sans peine que le sous-groupe de G correspondant à F est transitif (*voir* démonstration du théorème I).

Ainsi, à une décomposition du groupe simple Γ correspond un sous-groupe transitif d'un isomorphe holoédrique et transitif de Γ, et réciproquement.

IV.

Quelques propriétés des facteurs d'un groupe [1].

D'abord tous les énoncés donnés dans notre première Note s'appliquent identiquement aux groupes finis continus de transformations de Lie.

Nous mentionnerons encore les propriétés suivantes :

1° Si $A = B \times B'$ et si D contient B et est contenu dans A, on a $A = D \times B'$.

B et B' sont des facteurs complémentaires de A.

2° Si $A = B \times B' = C \times C'$, C étant contenu dans B, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C'.

3° Réciproquement, si $A = B \times C'$ et $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C', on a $A = C \times C'$.

---

[1] Nous groupons ici un certain nombre de propriétés dont les énoncés et la démonstration sont absolument identiques soit dans la théorie des groupes finis continus de transformations de Lie, soit dans celle des groupes de substitutions, à condition de remplacer pour la première les produits et les quotients de nombres par des sommes et des différences respectivement. Ces propriétés ont été établies par nous pour la deuxième théorie soit dans une Note précitée du *Bulletin de la Société Mathématique*, soit dans la première Note de notre Mémoire. Nous ne donnerons donc ici que les énoncés de la Note du *Bulletin de la Société Mathématique*.

4° Si A et B sont échangeables à C, (A, B) est échangeable à C.

5° Si A et B sont échangeables et si C, contenu dans B, est échangeable à A, soit D le groupe commun à A et B : D est échangeable à C.

6° Si $A = C \times B'$ et si B contient C et est contenu dans A, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et B'.

7° Réciproquement, si $A = B \times B'$, si D est le groupe commun à B et B', et si $B = C \times D$, on a $A = C \times B'$.

Nous ferons encore observer, d'après la remarque I de la note I et le théorème III ci-dessus, que tout groupe fini continu de transformations de Lie donnera naissance à deux suites au moins analogues à celles du lemme II et du théorème I de la note I.

V.

Autre manière de présenter certaines des idées précédentes.

Soient G un groupe transitif à n variables $x_1, \ldots, x_n$, et g paramètres, H_0 le groupe des transformations de G qui laissent le point $H_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile, d'ordre h_0; on a

$$g = n + h_0 \text{ (1)}.$$

Considérons deux divisions de l'espace $x_1, \ldots, x_n$, à p et q degrés de liberté, invariables par G,

$$(8) \qquad \begin{cases} P, & \Omega_1(x) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-p}(x) = \alpha_{n-p}, \\ Q, & O_1(x) = a_1, \quad \ldots, \quad O_{n-q}(x) = a_{n-q}. \end{cases}$$

L'ensemble S des deux systèmes d'équations P et Q forme une division de l'espace invariable par G, division que nous appellerons la *plus grande division commune* (2) à P et Q. En d'autres termes, toute transformation de G remplace l'intersection d'une quelconque P,

(1) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 203 et 217.

(2) Toute division invariable par G et dont les équations ont pour conséquence les équations P et Q est dite *commune* à P et Q.

des surfaces P et d'une quelconque Q_1 des surfaces Q par l'intersection de deux surfaces analogues P_2 et Q_2 respectivement. Nous désignerons par s le nombre de degrés de liberté de chaque multiplicité de S.

Ceci posé, considérons celle P_0 des multiplicités P

$$(9)\quad \Omega_1(x) = \Omega_1(x^0) = \alpha_1^0, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-p}(x) = \Omega_{n-p}(x^0) = \alpha_{n-p}^0,$$

qui contient le point H_0, et soit (P_0) le sous-groupe des transformations de G laissant P_0 immobile; (P_0) contient H_0 et est un groupe à $r - n + p$ paramètres (¹).

De même le sous-groupe (Q_0) des transformations de G laissant invariable la multiplicité Q_0,

$$(9\,bis)\quad O_1(x) = O_1(x^0) = a_1^0, \quad \ldots, \quad O_{n-q}(x) = O_{n-q}(x^0) = a_{n-q}^0,$$

contient H_0 et est un groupe à $r - n + q$ paramètres.

Le sous-groupe (S_0) des transformations de G laissant invariable la multiplicité S_0 déterminée par (9) et (9 *bis*) contient H_0 : je dis qu'il est formé du sous-groupe des transformations communes à (P_0) et (Q_0).

En effet, toute transformation commune à (P_0) et (Q_0) laisse (9) et (9 *bis*) invariables, et appartient à (S_0). Réciproquement, toute transformation générale de (S_0) remplace P_0 par une multiplicité P pour laquelle $\Omega_i(x)$ a la valeur α_i^0, c'est-à-dire par P_0, et appartient à (P_0); de même, elle appartient à (Q_0), et (S_0) est bien le groupe des transformations communes à (P_0) et (Q_0). (S_0) a $r - n + s$ paramètres. Donc :

Lemme. — *Le sous-groupe* (S_0) *des transformations de* G *qui laissent invariable une multiplicité* S_0, *contenant un point* H_0 *de position générale, de la plus grande division commune* S *à deux divisions* P *et* Q *de l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *invariables par* G *est le sous-groupe commun aux deux sous-groupes* (P_0) *et* (Q_0) *des transformations de* G *qui laissent invariables respectivement les*

(¹) Lie, *loc. cit.*, p. 478-479.

multiplicités P_0 *et* Q_0 *de* P *et* Q *contenant le point* Π_0. S *a s degrés de liberté si* (S_0) *est d'ordre* $r - n + s$.

Cherchons maintenant à quelles conditions il existera une division T de l'espace $x_1, \ldots, x_n$

$$(10) \qquad \Theta_1 = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \Theta_{n-t} = \beta_{n-t},$$

invariable par G, et telle que les relations (10) équivalent à $n - t$ des relations (9) et à $n - t$ des relations (9 *bis*). Si (10) existe, et si l'on choisit t minimum, c'est-à-dire de façon qu'il n'y ait aucune division U contenant P, Q et (10) autre que (10), on aura

$$n - s \leqq n - p + n - q - (n - t),$$

et $p + q - t \leqq s$; (10) sera dite *multiple* de ces deux divisions P et Q.

Prenons les transformations de (P_0), et opérons-les sur Q_0; elles remplacent Q_0 par ∞^{p-s} multiplicités Q dont l'ensemble sera désigné par Σ_0.

Soit μ une transformation de G transformant P_0 en P_1 et Q_0 en Q_1; en opérant les transformations de (P_1) sur Q_1 comme celles de (P_0) sur Q_0, on obtient un ensemble Σ_1 de ∞^{p-s} multiplicités Q, etc. (P_1) est le transformé de (P_0) par μ.

L'ensemble $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ ainsi obtenu forme-t-il une division de l'espace invariable par G?

D'abord toute transformation de G remplace Σ_i par Σ_j.

En effet, soit θ_0 une transformation de (P_0); μ transforme P_0 en P_1 et Q_0 en Q_1; θ_0 transforme Q_0 en Q'_0 appartenant à Σ_0. On a

$$Q_0\theta_0 = Q'_0, \qquad Q_0\mu = Q_1,$$
$$Q_1\mu^{-1}\theta_0\mu = Q_0\theta_0\mu = Q'_0\mu;$$

si $\theta_1 = \mu^{-1}\theta_0\mu$, la transformée θ_1 de θ_0 par μ, appartenant à (P_1), change Q_1, appartenant à Σ_1, en la transformée $Q'_0\mu$ de Q'_0, appartenant à Σ_0, par μ. Donc Σ_1 est l'ensemble transformé de Σ_0 par μ. De même toute autre transformation de G remplace Σ_0 par un des ensembles Σ_j.

Alors, soit une transformation μ_1 de G : elle remplace Σ_i par Λ_i : si μ_2 remplace Σ_0 par Σ_i, $\mu_2\mu_1$ remplace Σ_0 par Λ_i, qui est un des ensembles Σ_j.

Ceci posé, si Σ_1, Σ_2, ... est une division invariable par G, par définition cet ensemble sera formé de multiplicités permutées exclusivement entre elles par les transformations de G, et telles qu'un point de position générale ne peut appartenir à deux d'entre elles. Σ_0, par exemple, sera alors une multiplicité que toute transformation θ_0 de (P_0) remplace par une Σ'_0 des multiplicités Σ_0, Σ_1, ... contenant la multiplicité Q'_0 que θ_0 substitue à Q_0 : Q'_0 appartient à Σ_0 et contient un point de position générale, c'est-à-dire que Σ'_0 et Σ_0 ont un point de position générale commun, et $\Sigma'_0 = \Sigma_0$. Une transformation W de (Q_0) laisse Q_0 invariable, et, par suite, aussi Σ_0. Donc le groupe $[(P_0), (Q_0)]$ dérivé de (P_0) et (Q_0) laisse Σ_0 invariable et appartient à G. Soient $\zeta = r - m$ l'ordre du sous-groupe Z de G laissant Σ_0 invariable, η l'ordre de $[(P_0), (Q_0)]$. La division Σ_0, Σ_1, ... possédant $p + q - s$ degrés de liberté, on a

$$\zeta = r - m = r - n + p + q - s \geq \eta.$$

D'autre part (P_0) et (Q_0) ayant en commun exactement les transformations d'un groupe à $r - n + s$ paramètres, on a

$$\begin{aligned} \eta &\geq r - n + p + r - n + q - (r - n + s), \\ &\geq r - n + p + q - s = \zeta. \end{aligned}$$

Donc $\zeta = \eta = r - n + p + q - s$, et, d'après le théorème II, (P_0) et (Q_0) sont échangeables.

Réciproquement, supposons (P_0) et (Q_0) échangeables, et formons comme précédemment l'ensemble Σ_0, Σ_1, ... $R = [(P_0), (Q_0)]$ a $r - n + p + q - s$ paramètres exactement. Je dis que Σ_0, Σ_1, ... forme une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ invariable par G.

En effet, soit $\Pi_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un point de position générale : en opérant sur Π_0 les transformations de (Q_0) on obtient tous les points de Q_0, car toute transformation de G, qui est transitif, remplaçant Π_0 par un point de Q_0 appartient à (Q_0). Toute transformation U de R

est le produit d'une transformation de (Q_0) par une de (P_0) (Théorème I) et remplace Π_0 par un point Π_1 appartenant à Σ_0 : donc, tout point que R substitue à Π_0 appartient à Σ_0. Inversement, tout point Π_2 de Σ_0 est tel que toute transformation U_1 de G substituant Π_0 à Π_2 appartient à R; car ce point appartient à une Q' des multiplicités Q de Σ_0; il y a une transformation U' de (P_0) remplaçant Q_0 par Q et $U_1 U'^{-1} = U''$ laisse Q_0 invariable, c'est-à-dire appartient à (Q_0). Donc $U_1 = U'' U'$, c'est-à-dire appartient à R. Σ_0 est alors l'ensemble des points de position générale que R substitue à Π_0.

Or R est un sous-groupe de G contenant le sous-groupe de G laissant Π_0 immobile, et l'on sait [1] qu'on peut lui faire correspondre une division de l'espace dont chaque multiplicité a $p+q-s$ degrés de liberté et invariante par G, une des multiplicités M' de cette division qui contient un point de position générale Π' convenablement choisi étant laissée invariable par R. R permute transitivement avec Π' les points de position générale contenus dans M' : Π' appartient à l'un des systèmes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$, et M' et Σ' ont en commun tous leurs points de position générale : Σ' coïncide donc avec M'.

Soit T une transformation de G remplaçant Π' par Π_i : elle remplace Σ' par Σ_i et M' par M_i. Donc $\Sigma_i = M_i$, et $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ forme bien une division invariable par G. Donc :

Théorème V. — *Étant donné un groupe transitif* G *dans l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *qui laisse invariantes les deux divisions de cet espace*

$$\text{P} \qquad \Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{n-p}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_{n-p},$$

$$\text{Q} \qquad O_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \qquad \ldots, \qquad O_{n-q}(x_1, \ldots, x_n) = a_{n-q},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des multiplicités générales Q, *permutées avec une d'elles* Q_0 *par les transformations de* (P_0), *forme une multiplicité d'une division* Φ *de l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *invariable par* G, *est que* (P_0) *et* (Q_0) *soient*

[1] Comparer Lie, *Theorie der Trfgrup.*, p. 521, et ce Mémoire, deuxième Note, p. 31 et suiv.

échangeables, (P_0) *et* (Q_0) *étant formés respectivement des transformations de* G *qui laissent invariables les multiplicités* P_0 *et* Q_0 *de* P *et* Q *contenant un même point* Π_0 *de position générale. Chaque multiplicité de la division* Φ *a* $p+q-s$ *degrés de liberté,* $r-n+s$ *étant l'ordre du groupe commun à* (P_0) *et* (Q_0) (¹).

Le théorème V comporte une interprétation géométrique; pour en faire saisir la portée il suffira de l'indiquer pour l'espace ordinaire :

Corollaire. — *Étant donné un groupe* G *transitif entre les trois variables* x, y, z *qui laisse invariables les deux systèmes de courbes*

$$\text{P} \qquad \Omega_1(x,y,z)=\alpha_1, \qquad \Omega_2(x,y,z)=\alpha_2,$$

$$\text{Q} \qquad O_1(x,y,z)=a_1, \qquad O_2(x,y,z)=a_2,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des courbes Q *permutées avec une d'elles* Q_0, *rencontrant* P_0, *par les transformations de* (P_0), *ou encore pour que l'ensemble des courbes* Q *qui rencontrent la courbe* P_0 *de* P *forme une surface appartenant à un système simplement infini de surfaces formant une division de l'espace invariable par* G, *est que les groupes* (P_0) *et* (Q_0) *soient échangeables,* (P_0) *et* (Q_0) *étant formés respectivement des transformations de* G *qui laissent invariables les courbes* P_0 *et* Q_0.

Si Q_0, rencontre P_0, il en est de même de toutes les transformées de Q_0 par (P_0), dont l'ensemble constitue Σ_0.

Donc chaque surface du système en question sera formée de l'ensemble des courbes Q qui rencontrent une courbe P, ou, inversement, de l'ensemble des courbes P qui rencontrent une courbe Q (²).

(¹) Nous dirons, par extension, que les deux divisions P et Q sont échangeables quand les deux groupes (P_0) et (Q_0) le sont.

(²) Il pourrait être intéressant de former tous les types de groupes transitifs entre trois variables qui jouissent de la propriété indiquée au corollaire, en s'appuyant sur le t. III de la *Theorie der Trfgrup.* de Lie, p. 141 et suiv. Nous laissons ce soin à d'autres en nous contentant d'en citer ci-après deux exemples.

Toute surface formée de courbes Q pourra d'ailleurs se définir par une équation

$$f(O_1, O_2) = \text{const.}$$

Mais ici la surface en question étant formée aussi de courbes P, on aura

$$(11) \qquad f(O_1, O_2) = \varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \text{const.}$$

comme équation du système de surfaces.

Les groupes G dont il est question au corollaire ci-dessus sont compris parmi ceux de la troisième catégorie de groupes transitifs à trois variables signalée par Lie [1]. On voit de suite que, dans (11), f est une solution commune aux deux équations aux dérivées partielles dont P et Q donnent une solution générale.

Ces résultats sont susceptibles de généralisation.

Soient

$$(12) \quad \Phi \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)}$$

les équations de la division Φ.

Les fonctions $O_1, \ldots, O_{n-q}$ sont indépendantes : prenons-les comme variables avec q autres variables $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$: (12) devient

$$\psi_1(O_1, \ldots, O_{n-q}, y_{n-q+1}, \ldots, y_n) = \beta_1, \ldots, \psi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)}.$$

Pour chaque système de valeurs des $a_1, \ldots, a_{n-q}$ on a un système de valeurs des β pour lequel ces équations ont lieu quels que soient $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$; car pour toute multiplicité Q on a des valeurs déterminées des β_i quels que soient $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$. Donc quels que soient $O_1, \ldots, O_{n-q}$ ces équations ne dépendent pas des y, et (12) peut s'écrire

$$\chi_1(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \chi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)}.$$

On verrait de la même manière que les χ sont des fonctions des Ω. C'est là la généralisation de la relation (11).

On peut dire encore :

---

[1] *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 141.

Si

$$(13)\qquad \begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

sont les systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles qui définissent les divisions P et Q, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-(p+q-s)}$ sont des solutions indépendantes du système complet dérivé de (13) (¹).

Ce système possède donc au moins $n-(p+q-s)$ solutions indépendantes, c'est-à-dire que le système complet dérivé de (13) contient au plus $p+q-s$ équations indépendantes. Je dis qu'il n'en a pas moins.

En effet, sinon, il posséderait $n-\eta$ solutions indépendantes, avec $\eta < p+q-s$. Ces solutions étant de la forme

$$\chi(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \chi'(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-p})$$

pourraient remplacer chacune $n-\eta$ des équations de chaque système (8). L'ensemble des équations (8) équivaudrait à, au plus,

$$n-p+n-q-(n-\eta) = n-(p+q-\eta)$$

équations indépendantes. Mais (8), d'après un lemme précédent, contient exactement $n-s$ équations indépendantes. Donc,

$$n-s \leqq n-(p+q-\eta)$$

et

$$p+q-s \leqq \eta,$$

ce qui est contradictoire. Donc,

$$\eta = p+q-s.$$

Il y a mieux : les équations (13) forment déjà un système complet, c'est-à-dire sont au nombre de $p+q-s$ linéairement indépendantes.

En effet, supposons qu'il y en ait $p+\omega$ linéairement indépendantes. D'abord,

$$Y_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_p = 0$$

(¹) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 89 et 221.

le sont. Parmi les équations $Z_1 = 0, \ldots, Z_q = 0$, qui sont linéairement indépendantes, on en a $q - \omega$ exactement, les $q - \omega$ dernières, par exemple, dont les premiers membres sont de la forme

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_p Y_p + \mu_1 Z_1 + \ldots + \mu_\omega Z_\omega.$$

On peut évidemment remplacer ces $q - \omega$ équations par les $q - \omega$ équations de la forme

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_p Y_p = 0.$$

En choisissant convenablement les équations $Y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, en en formant au besoin des combinaisons linéaires, on pourra supposer que ces $q - \omega$ équations soient

$$(14) \qquad Y_1 = 0, \quad \ldots \quad Y_{q-\omega} = 0,$$

leurs premiers membres étant indépendants. Ces $q - \omega$ équations forment un système complet, car le crochet de deux d'entre elles appartient évidemment à la fois aux deux systèmes $Y_i = 0$, $Z_j = 0$ et est fonction linéaire de $Y_1, \ldots, Y_{q-\omega}$. Désignons par

$$(15) \qquad \Psi_1 = \psi_1, \quad \ldots, \quad \Psi_{n-q+\omega} = \psi_{n-q+\omega}$$

une solution générale de ce système (14) dépendant des $n - q + \omega$ constantes arbitraires $\psi_1, \ldots, \psi_{n-q+\omega}$.

Ω_1, par exemple, est solution du premier système (13) et de (14). Donc,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = F_1(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}), \\ \qquad \text{et, de même,} \\ \Omega_2 = F_2(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{n-p} = F_{n-p}(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}). \end{array} \right.$$

De même pour les O_i.

Ceci posé, (15) constitue une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ inva-

riable par G ; en effet, par exemple,

$$(X_i Y_1) = \sum_1^p {}_\nu \psi_{i1\nu} Y_\nu = \sum_1^q {}_\nu \chi_{i1\nu} Z_\nu,$$

car les deux systèmes d'équations (13) définissent [1] deux divisions invariables par G ; $(X_i Y_1)$ est alors fonction linéaire de $Y_1, \ldots, Y_{q-\omega}$; de même pour $Y_2, \ldots, Y_{q-\omega}$. Alors, considérant celle des multiplicités (15), T_0, qui contient Π_0, il y a un sous-groupe (T_0) de G formé des transformations de G, laissant T_0 immobile. (T_0) laisse invariables P_0 et Q_0 d'après (16) et appartient au groupe (S_0) commun à (P_0) et (Q_0). (T_0) a $r - n + q - \omega$ paramètres et

$$r - n + q - \omega \leqq r - n + s ;$$

d'où

(17) $$q - s \leqq \omega.$$

Mais alors, parmi les équations (13), on en aurait $p + \omega \geqq p + q - s$ linéairement indépendantes, alors que $p + \omega \leqq p + q - s$, d'après ce qui précède. Donc

$$\omega = q - s.$$

Ainsi (13) forme un système complet qui définit la division Φ.

Réciproquement, si (13) forme un système complet, il définit évidemment une division Φ invariable par G, car les crochets (XY) et (XZ) sont des fonctions linéaires de Y et Z.

Cette division Φ contient les deux divisions P et Q et est la plus petite division multiple de P et Q.

Nous pouvons donc dire encore :

Théorème VI. — *Tout étant posé comme au théorème V, si*

(13) $$\begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

sont les systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles qui définissent les deux divisions P *et* Q *invariables par le*

---

[1] Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 221.

groupe transitif G, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des équations* (13) *forme un système complet est que* (P_0) *et* (Q_0) *soient échangeables. Ce système complet est formé de* $p+q-s$ *équations indépendantes si* $r-n+s$ *est l'ordre du groupe commun à* (P_0) *et* (Q_0).

VI.

Il convient de donner ici quelques exemples d'applications des théorèmes précédents.

1° *Exemple d'application du corollaire du théorème V.* — Parmi les exemples les plus simples qu'on puisse donner de l'application de ce corollaire, nous citerons celui du groupe G transitif régulier de transformations échangeables p_1, p_2, p_3, groupe des translations.

Les équations

$$(18) \qquad \begin{cases} X = f(u) + \varphi(v) + \psi(w), \\ Y = f_1(u) + \varphi_1(v) + \psi_1(w), \\ Z = f_2(u) + \varphi_2(v) + \psi_2(w), \end{cases}$$

où les f_i, φ_i, ψ_i sont des fonctions linéaires, représentent trois familles de plans engendrés par la translation d'une des droites

$$\begin{array}{lll} X = f(u), & Y = f_1(u), & Z = f_2(u), \\ X = \varphi(v), & Y = \varphi_1(v), & Z = \varphi_2(v), \\ X = \psi(w), & Y = \psi_1(w), & Z = \psi_2(w), \end{array}$$

et aussi trois congruences de droites dépendant de deux paramètres variables v, w, ou w, u, ou u, v respectivement. Ces familles et ces congruences constituent des divisions de l'espace invariables par les transformations de G, au moins en général. Une des droites de la congruence $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, par exemple, est laissée invariable par la transformation

$$X = X + \delta a, \qquad Y = Y + \delta b, \qquad Z = Z + \delta c,$$

si

$$f(u) = \delta a + f(u + \delta u),$$

$$f_1(u) = \delta b + f_1(u + \delta u), \qquad f_2(u) = \delta c + f_2(u + \delta u).$$

ce qui détermine $\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial u}$ en fonction de u, c'est-à-dire un sous-groupe de G à un paramètre. On trouvera, pour la congruence $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, un autre sous-groupe à un paramètre en général : le groupe H dérivé de ces deux sous-groupes est à deux paramètres, puisque G est formé de transformations échangeables. Sa transformation générale est de la forme

$$X' = X + \delta a_2, \qquad Y' = Y + \delta b_2, \qquad Z' = Z + \delta c_2$$

avec

$$f(u) + \varphi(v) = \delta a_2 + f(u + \delta u) + \varphi(v + \delta v),$$
$$f_1(u) + \varphi_1(v) = \delta b_2 + f_1(u + \delta u) + \varphi_1(v + \delta v),$$
$$f_2(u) + \varphi_2(v) = \delta c_2 + f_2(u + \delta u) + \varphi_2(v + \delta v),$$

ce qui montre bien que la transformation générale de H laisse invariable la famille de plans $w = \text{const.}$, puisque

$$\delta a_2 = \frac{\partial a}{\partial u}\delta u + \frac{\partial a_1}{\partial v}\delta v,$$
$$\delta b_2 = \frac{\partial b}{\partial u}\delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v}\delta v, \qquad \delta c_2 = \frac{\partial c}{\partial u}\delta u + \frac{\partial c_1}{\partial v}\delta v.$$

2° *Exemples d'application du théorème V.* — Nous donnerons des exemples de cas où les conditions prévues au théorème sont réalisées, et d'un cas où elles ne le sont pas.

Soit G un groupe transitif; si ce groupe est formé de transformations échangeables ([1]), les conditions prévues seront réalisées pour deux sous-groupes quelconques (P) et (Q) de G.

On peut encore citer, quand $n = 3$, le groupe $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{31}, T_{32}$, transitif, à cinq paramètres entre les variables x_1, x_2, x_3, quand on pose, avec Lie, $T_{ik} = x_i p_k$. Ce groupe, cité par cet éminent géomètre ([2]) dans

---

([1]) Dans ce cas, G est évidemment régulier, car une transformation qui laisse un point de position générale immobile doit laisser immobile tout point de position générale, c'est-à-dire est $= 1$.

([2]) *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 117.

sa liste des groupes linéaires homogènes à cinq paramètres, est transitif. Tout point x_1^0, x_2^0, x_3^0 pour lequel $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ est un point de position générale ([1]), les trois transformations T_{11}, T_{22}, T_{33} étant prises comme linéairement indépendantes. On a

$$T_{32} = x_3 p_2 = \frac{x_3}{x_2} x_2 p_2 = \frac{x_3}{x_2} T_{22},$$

$$T_{31} = x_3 p_1 = \frac{x_3}{x_1} T_{11},$$

et les deux transformations $T_{32} - \frac{x_3^0}{x_2^0} T_{22}$, $T_{31} - \frac{x_3^0}{x_1^0} T_{11}$ forment un groupe K à deux paramètres laissant le point (x^0) invariable ([2]). Les crochets $(T_{ik} T_{\mu\nu})$ se réduisent tous à o, $\pm T_{31}$, $\pm T_{32}$, les groupes (P), (Q) obtenus en adjoignant à K une quelconque des transformations T_{11}, T_{22} ont chacun trois paramètres, et le groupe (Φ) dérivé de ces deux groupes a quatre paramètres. Aux groupes (P), (Q), (Φ) correspondent des courbes et des surfaces auxquelles on peut appliquer le corollaire précédent.

Au contraire, prenons un isomorphe régulier du groupe à trois paramètres dont la structure est donnée par les formules

$$(X_1 X_2) = 0, \qquad (X_2 X_3) = 0, \qquad (X_3 X_1) = X_2.$$

On vérifie sans peine que les conditions nécessaires et suffisantes ([3]) pour que cette structure détermine un groupe sont remplies. X_1 et X_3 déterminent deux divisions P et Q auxquelles ne s'appliquent pas le théorème V et son corollaire, car le groupe dérivé de X_1 et X_3 est le groupe lui-même.

Le groupe linéaire homogène T_{21}, T_{13}, T_{23} est un exemple d'un groupe ayant une pareille structure, car

$$(T_{21} T_{13}) = T_{23}, \qquad (T_{21} T_{23}) = 0, \qquad (T_{13} T_{23}) = 0.$$

---

(1) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 498.

(2) *Id.*, p. 206.

(3) *Id.*, p. 170.

Pour terminer, nous établirons ce théorème :

Théorème VII. — *Un groupe G dont tous les sous-groupes sont deux à deux échangeables est intégrable.*

On pourrait essayer de donner une démonstration directe de ce théorème en s'appuyant sur les relations entre les coefficients c_{iks} qui déterminent la structure du groupe : nous nous contenterons de nous appuyer sur ce théorème dû à MM. Engel et Cartan [1] :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit intégrable est qu'il ne contienne aucun sous-groupe simple à trois paramètres.

Nous montrerons que G ne contient aucun sous-groupe simple à trois paramètres en déterminant tous les types de groupes à trois paramètres que peut contenir G.

Soient X_1, X_2, X_3 trois transformations infinitésimales indépendantes d'un pareil sous-groupe H; les groupes X_1, X_2, X_3 sont échangeables deux à deux, et l'on a [2]

$$(19)\qquad \begin{cases} (X_1 X_2) = c_{121} X_1 + c_{122} X_2, \\ (X_2 X_3) = c_{232} X_2 + c_{233} X_3, \\ (X_3 X_1) = c_{311} X_1 + c_{313} X_3. \end{cases}$$

On peut toujours supposer [3] X_1, X_2, X_3 choisis de façon que l'on ait c_{121} ou $c_{122} = 0$, c_{232} ou $c_{233} = 0$.

Les cas où $c_{121} = c_{232} = 0$ et $c_{122} = c_{233} = 0$ se ramènent l'un à l'autre si l'on permute X_1 et X_3, et il suffit de considérer l'un d'eux.

Si $c_{122} = c_{232} = 0$, ou si $c_{121} = c_{233} = 0$, H renferme [4] un sous-groupe invariant et n'est pas simple.

---

(1) Cartan, *Thèse de Doctorat*, p. 103-104. Pour la définition d'un groupe intégrable, *voir*, par exemple, cette Thèse, p. 44.

(2) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 170.

(3) *Id.*, p. 591.

(4) *Id.*, p. 261.

Premier cas : $c_{121} = c_{232} = 0$. — (19) devient

$$(20)\quad \begin{cases} (X_1 X_2) = c_{122} X_2, \\ (X_2 X_3) = c_{233} X_3, \\ (X_3 X_1) = c_{311} X_1 + c_{313} X_3. \end{cases}$$

Les identités connues de Jacobi se réduisent ici à

$$(21)\quad [(X_1 X_2) X_3] + [(X_2 X_3) X_1] + [(X_3 X_1) X_2] = 0,$$

ce qui donne

$$c_{122}(X_2 X_3) + c_{233}(X_3 X_1) + c_{311}(X_1 X_2) + c_{313}(X_3 X_2) = 0,$$

ou

$$X_3(c_{122} - c_{313}) c_{233} + c_{233}(c_{311} X_1 + c_{313} X_3) + c_{311} c_{122} X_2 = 0,$$

ou enfin

$$(22)\quad c_{233} c_{311} = 0 = c_{311} c_{122} = c_{122} c_{233}.$$

On sait [1] que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la structure (20) soit celle d'un groupe à trois paramètres. On a, dans ce cas, grâce à (22), toutes les structures admissibles. Si $c_{233} = 0$, il faut $c_{311} = 0$ ou $c_{122} = 0$; alors il manque soit X_1, soit X_2, dans les seconds membres de (20), et H contient un sous-groupe invariant à deux paramètres. Sinon, $c_{311} = 0 = c_{122}$, et X_3 engendre un sous-groupe invariant de H. Donc, dans le premier cas, H est composé.

Autres cas. — Quand $c_{122} = c_{233} = 0$, on obtient les structures en permutant X_1 et X_3 dans les structures précédentes. Quand $c_{122} = c_{232} = 0$, ou $c_{121} = c_{233} = 0$, on obtient encore les structures en appliquant l'identité de Jacobi.

---

[1] Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 170, et t. II, p. 297.

TROISIÈME NOTE.

SUR LA CLASSE DES GROUPES FINIS CONTINUS PRIMITIFS DE TRANSFORMATION DE LIE.

I.

Définitions. — Il convient, avant toutes choses, que nous précisions un peu les définitions données par Lie d'un groupe transitif et d'un groupe plusieurs fois transitif (¹).

On peut dire qu'un groupe est transitif quand il permute transitivement tous les points P n'appartenant pas à une multiplicité de R_n. Il sera k fois transitif quand il permettra de remplacer à la fois k des points P arbitrairement choisis n'appartenant pas à une certaine multiplicité par k de ces points arbitrairement choisis. Un pareil point est dit *de position générale*.

Cette définition équivaut à celle de Lie pour la transitivité simple. En effet, soient

$$X_k = \sum_1^r {}_i \xi_{ki}(x) p_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$

les transformations infinitésimales du groupe : si les déterminants de côté n du rectangle

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls identiquement, on voit sans peine qu'il existe une transformation infinitésimale remplaçant un point P de position générale $x_1, \ldots, x_n$ par tout autre point infiniment voisin $x_1 + \delta t_1, \ldots,$

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 212 et 631.

$x_n + \delta t_n$. Les seuls points pour lesquels il peut y avoir exception sont ceux appartenant à la multiplicité obtenue en égalant à o tous les déterminants de Δ.

Au contraire, si tous les déterminants de côté n de Δ sont nuls, le groupe possède au moins un invariant $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$, et les multiplicités $\Omega =$ const. en nombre infini sont invariantes par les transformations du groupe. G n'est pas transitif d'après notre définition.

On pourra toutefois, à l'occasion, en vue de pouvoir indiquer une propriété remarquable d'un groupe, introduire dans certains cas une définition analogue, mais plus restrictive : on peut dire qu'un groupe sera k fois *complètement transitif* quand il permettra de remplacer k quelconques des points qu'il déplace par k quelconques des mêmes points.

Nous introduirons encore la distinction suivante : soit G un groupe transitif; il sera de *première espèce* s'il laisse invariant un certain nombre de points ne formant pas une multiplicité, c'est-à-dire ne dépendant pas d'un paramètre arbitraire au moins, de *deuxième espèce* s'il en laisse invariant un nombre infini formant une multiplicité.

Ces nouvelles définitions ont un intérêt parce qu'elles permettent de formuler pour la théorie des groupes de transformations certains théorèmes d'énoncés semblables à des théorèmes de la théorie des substitutions [1]. Ainsi :

Théorème I. — *Quand un groupe* G *est deux fois complètement transitif, ou s'il est complètement transitif et si le groupe* H *des transformations de* G *laissant un point de position générale de* G *immobile est un sous-groupe de* G *transitif et de première espèce,* G *est primitif* [2].

En effet, soit H le sous-groupe des transformations de G laissant

---

[1] Un sous-groupe transitif d'un groupe G complètement transitif qui laisse invariant un certain nombre des points déplacés par G en permutant transitivement tous les autres sera dit un sous-groupe transitif de deuxième espèce (de première espèce) de G, si ces points forment (ne forment pas) une multiplicité.

[2] Comparer, pour les théorèmes I à IV, Jordan, *Journal de Liouville*, 1871.

invariable le point $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale. Il permute transitivement tous les points que G déplace, à part le point P_0 et quelques autres ne formant pas une multiplicité, et est complètement transitif.

Supposons que G ne soit pas primitif: il laisse invariante une division

$$(1) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}, \ \ldots, \ \varphi_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

de l'espace R_n. En particulier, toute transformation de H remplace la multiplicité

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1 \quad (x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1 \quad (x_1^0, \ldots, x_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{n-m}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \end{cases}$$

par une des multiplicités (1). Mais H laisse P_0 invariable, en sorte que cette transformation de H doit remplacer (2) par une multiplicité contenant P_0, c'est-à-dire par (2) elle-même. (2) contient d'ailleurs, puisque G est complètement transitif, une infinité de points de position générale de R_n. H devrait permuter exclusivement entre eux tous les points de position générale de (2), et ne serait pas transitif et de première espèce.

Théorème II. — *Si un groupe* G *est* k *fois complètement transitif, le sous-groupe* K *des transformations de* G *laissant* t *points immobiles* ($t < k$) *est* $k - t$ *fois complètement transitif.*

Théorème III. — *Si un groupe* G *est* k *fois transitif, le sous-groupe* K *des transformations de* G *laissant* t *points de position générale de* G *immobile est* $k - t$ *fois transitif.*

Appelons *complètement primitif* un groupe primitif et complètement transitif. Nous pourrons encore formuler le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si un groupe* G *est complètement transitif, et s'il contient un sous-groupe* K *complètement primitif de deuxième espèce,* G *est complètement primitif.*

En effet, en général, l'ensemble des points de position générale que

G déplace et que K laisse immobile forme une multiplicité de l'espace R_n.

On peut toujours supposer K maximum parmi les sous-groupes de G qui jouissent de la même propriété. Alors toute transformation g de G doit laisser K invariant, ce qui est impossible, puisque G est complètement transitif, ou le transformer en un autre groupe K' tel que le groupe dérivé de K et K', (K, K') soit complètement transitif et ne laisse qu'un certain nombre de points déplacés par G et ne formant pas une multiplicité immobile, ce qui est impossible d'après le théorème I, à moins que G soit primitif ou à moins que (K, K') = G.

Supposons G imprimitif :

$$(K, K') = G.$$

Alors la transformation g, de G remplace tous les points P de position générale que K laisse invariable formant une multiplicité E par des points tous déplacés par K, et E par un ensemble E' n'ayant aucun point commun avec E. Opérons de même sur K avec toutes les transformations de G. Les multiplicités E, E', E'', ... forment ainsi un ensemble invariant par G et constituant une division de l'espace invariable par G. K devrait laisser cette division invariable, ce qui est impossible puisqu'il est primitif ([1]).

Remarque. — On pourrait peut-être rendre un peu plus généraux certains des théorèmes précédents : si cela était nécessaire, on le ferait par des procédés analogues.

II.

On sait que si G est un groupe fini continu transitif, il contient des transformations infinitésimales d'ordre ([2]) 1, 2, ..., s, et non des transformations infinitésimales d'ordre $\geq s+1$, s étant un entier fini. Lie a montré ([3]) que, si G est primitif, on a

$$s \leq 2n+1.$$

([1]) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 220.

([2]) *Id.*, p. 607 et 190 et suiv.

([3]) *Id.*, t. III, p. 313.

Sa démonstration établit même que l'ensemble des transformations d'ordre s du groupe primitif G forme un sous-groupe R qui ne peut être transitif si $s > 2$, et forme un sous-groupe invariant du sous-groupe Q des transformations de G d'ordre $\geqq 1$ pour un point de position générale P_0. Il en résulte ([1]) que Q ne peut être primitif si $s > 2$, sans quoi, d'après un lemme antérieur ([2]), il faudrait que R fût transitif, contrairement à ce qui précède. Donc, si nous convenons de dire avec Lie que le groupe G est *de classe s*, nous avons le théorème :

Théorème I. — *Un groupe primitif G, tel que l'ensemble des transformations de G laissant un point de position générale immobile forme un groupe primitif, a sa classe* $\leqq 2$.

Corollaire. — Si G est trois fois complètement transitif, sa classe est $\leqq 2$ ([3]).

Théorème II. — *Un groupe G, pour lequel les valeurs des paramètres du sous-groupe des transformations laissant un point de position générale immobile restent finies, ne peut être deux fois transitif.*

En effet, soient G un groupe deux fois transitif, H le sous-groupe des transformations de G laissant invariable un point de position générale de G, s la classe de G.

Si G et H contiennent des transformations infinitésimales de classe $s \geqq 2$, on a

$$X_k = \sum_i \xi_{ki} p_i, \tag{3}$$

avec

$$\xi_{ki} = \sum_{\nu\pi} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) g''_{ki\nu\pi} + \ldots. \tag{4}$$

([1]) Nous croyons que Lie ne l'a pas remarqué.

([2]) Lemme de la deuxième Note, p. 34.

([3]) D'après le théorème I du § I. On peut étendre ce corollaire d'après les théorèmes I et IV du § I.

La transformation finie correspondante est de la forme

$$(5)\qquad x'_\nu = x_\nu + \frac{t}{1}\xi_{k\nu} + \frac{t^2}{1.2}\mathrm{X}\xi_{k\nu} + \ldots.$$

Elle laisse invariable le point $x_\nu = x_\nu^0$; considérons le point infiniment voisin $x_\nu^0 + \theta_\nu^0$: la transformation donne

$$x_\nu'^0 + \delta x_\nu'^0 = x_\nu^0 + \theta_\nu^0 + \mathrm{A},$$

A désignant des termes dont la somme est au moins du deuxième ordre par rapport à θ_ν^0 ; donc

$$\delta x_\nu'^0 = \theta_\nu^0,$$

et la transformation (5) laisse invariable tout point infiniment voisin du point x^0, et, parmi ces points, il y en a toujours une infinité qui n'appartiennent pas à une multiplicité déterminée, c'est-à-dire qui sont de position générale.

Mais on sait que le sous-groupe K des transformations de classe s de H est invariant dans H. K laissant invariants d'autres points que le point x^0 n'appartenant pas à ceux que H laisse invariants doit se réduire à la transformation identique, puisque H est transitif. Donc il faut $s \leqq 1$.

Ceci posé, si $s = 1$, le sous-groupe H des transformations de G laissant le point x_ν^0 invariable, remplace tout point infiniment voisin de celui-là par un autre point forcément infiniment voisin, puisque t reste fini et, par suite, n'est pas transitif.

Ces raisonnements supposent seulement l'exactitude des formules (5) dans le domaine où varient les coefficients [1].

Soit G un groupe transitif de classe s. Lie a montré qu'on pouvait

---

[1] Comme exemple d'un groupe où les valeurs des paramètres du sous-groupe des transformations laissant un point de position générale immobile restent limitées, on peut citer le groupe des transformations réelles de coordonnées dans le plan, dans l'espace ordinaire ou plus généralement dans l'espace à n dimensions.

toujours lui faire correspondre un groupe transitif Γ engendré par les transformations

$$T_i^{(0)} = p_i, \qquad T_j^{(1)} = \sum_{i\nu}^{1\ldots n} \alpha_{ji\nu} x_i p_\nu$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_1),$$

et par m_2 transformations infinitésimales indépendantes du second ordre, m_3 du troisième ordre, ..., m_s du $s^{\text{ième}}$ ordre, dont la forme générale est

$$T_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}_\nu \xi_{i_k,\nu}^{(k)} p_\nu$$

$$(k = 2, 3, \ldots, s, \qquad i_k = 1, 2, \ldots, m_k),$$

où les $\xi^{(k)}$ sont des fonctions homogènes entières du $k^{\text{ième}}$ ordre de leurs arguments, ces transformations étant déduites d'autant de transformations indépendantes de G par suppression des termes d'ordre supérieur à l'ordre du terme d'ordre minimum.

Réciproquement, à tout groupe de la forme Γ correspond au moins un groupe transitif de classe s (¹).

Cette propriété des groupes Γ peut donc donner un intérêt particulier au théorème suivant qui leur est applicable;

Théorème III. — *Si un groupe* F *est simple, et s'il contient les transformations* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *il est primitif* (²).

En effet, supposons que F ne soit pas primitif : il laisse invariable une division de l'espace R_n :

(6) $$u_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.}$$

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 606.

(²) Plus généralement : un groupe transitif ne peut renfermer de groupe régulier formé de transformations échangeables que s'il est primitif ou composé avec un sous-groupe contenant un sous-groupe de ce groupe régulier. On a un théorème identique dans la théorie des substitutions (*J. de Math.*, p. 29; 1895 et *Bull. Soc. Math.*, p. 86; 1896).

I' contenant $p_1, \ldots, p_n$ formant un groupe H, cette division est invariante par H. Mais H est transitif et, par suite, permute transitivement les multiplicités de cette division; H contient un sous-groupe d'ordre m laissant invariable une multiplicité M_1 générale quelconque de la division.

D'ailleurs on sait que tout sous-groupe d'ordre m de H est semblable [1] par une transformation linéaire au sous-groupe $p_1, \ldots, p_m$. Supposons cette transformation effectuée. Ce sous-groupe est invariant [2] dans H, et toute transformation T de H le transforme en un sous-groupe laissant invariable une des multiplicités (6). H étant transitif, cette dernière peut être choisie arbitrairement : donc le sous-groupe $p_1, \ldots, p_m$ laisse invariable chacune des multiplicités (6).

L'ensemble des transformations de F laissant invariable chacune des multiplicités (6), forme alors un sous-groupe invariant de $F < F$, puisque F est transitif, et F est composé.

III.

La détermination de la classe s des groupes primitifs de degré n est un problème présentant certaines analogies avec le même problème dans la théorie des substitutions entre n lettres. Lie a montré [3], comme on l'a indiqué ci-dessus, que, comme pour la théorie des substitutions, la classe s était limitée en fonction de n.

Les théorèmes qui suivent révèlent de nouvelles analogies remarquables et intimes entre les notions de classe dans les deux théories des groupes finis continus de transformations et des groupes de substitutions, et donnent pour la première une interprétation géométrique; nous sommes toutefois obligés de modifier un peu la définition de la classe donnée par Lie.

On peut déduire, presque à titre de cas particulier, d'un théorème de Lie ce théorème :

---

(1) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 558.

(2) *Ibid.*, p. 555.

(3) *Ibid.*, p. 387, par exemple.

Théorème I. — *Le groupe de transformations dérivé d'un groupe régulier* G [*c'est-à-dire à n variables et n paramètres essentiels* (¹)] *et de son groupe réciproque ou conjoint* Γ *est un groupe primitif à la condition nécessaire et suffisante que* G *soit simple.*

Lie ne paraît pas avoir pensé à énoncer ce théorème, qui a un énoncé identique dans la théorie des substitutions (²), et nous ne croyons pas inutile d'en donner une démonstration directe et simple.

Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n \tag{7}$$

et

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n \tag{8}$$

n transformations infinitésimales indépendantes correspondantes des deux groupes G et Γ, qui sont holoédriquement isomorphes, et

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_m \qquad (m < n) \tag{9}$$

un sous-groupe M de Γ.

Les m équations aux dérivées partielles

$$Z_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_m = 0 \tag{10}$$

sont indépendantes, puisque Γ est régulier, et forment un système complet à m équations, puisque $(Z_i Z_j)$, $(i, j \leqq m)$, appartient à M.

Soient $u_1, \ldots, u_{n-m}$, $n-m$ solutions indépendantes de (10). Les deux groupes G et Γ étant réciproques,

$$(X_i Z_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

en particulier

$$(X_i Z_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

(¹) D'après la définition de Lie.

(²) *Voir* Frattini, *Atti della R. A. dei Lincei* (Rendiconti, 19 marzo 1893) et nos Mémoires ci-après : *Thèse de Doctorat*, p. 31; *Quart. Journ. of Math.*, p. 119, 1894; et *Mém. des Sav. étrangers*, t. 32, n° 8, p. 53).

Donc le système complet (10) admet [1] toutes les transformations du groupe G, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad X_k u_\sigma = \omega_k(u_1, \ldots, u_{n-m}) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-m).$$

G laisse alors invariante la division de l'espace

$$(12) \quad u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.},$$

et, par suite, est imprimitif.

Le sous-groupe M laisse invariante chacune des multiplicités de cette division ; supposons M invariant dans Γ : chaque transformation de Γ remplace chaque multiplicité de (12), par une multiplicité invariante par M, c'est-à-dire par une des multiplicités de (12) ; (12) est donc une division de l'espace invariante par Γ, et aussi par G, en sorte que le groupe dérivé de G et Γ est imprimitif.

Réciproquement, admettons que ce groupe dérivé soit imprimitif et laisse invariante une division

$$(12) \quad u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.}$$

de l'espace. Cette division est laissée invariante par G et Γ. D'après un théorème de Lie [2], on sait que le groupe transitif Γ renferme un sous-groupe M formé de l'ensemble des transformations de Γ qui laissent invariante une U_0 des multiplicités (12). Il y a une transformation T du groupe transitif G remplaçant U_0 par une quelconque U_1 des multiplicités (12), et transformant M en un groupe laissant U_1 immobile et qui coïncide avec M : M laisse invariante chacune des multiplicités (12), par suite est invariant dans Γ, qui n'est pas simple.

Nous avons indiqué, à propos du théorème correspondant dans la théorie des substitutions, une règle permettant de trouver la classe des groupes primitifs correspondants. Il est remarquable que l'on obtienne un énoncé analogue dans la théorie des groupes de transformations.

---

(1) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, p. 141.

(2) *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 481.

Lemme. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe dérivé* F *d'un groupe régulier* G *et de son conjoint ou réciproque* Γ *renferme un groupe à un paramètre, dont les transformations finies laissent invariable un élément de multiplicité plane à t degrés de liberté et non à $t+1$ passant par un point de position générale, est que* G *renferme une transformation infinitésimale telle que le sous-groupe des transformations de* G *qui lui sont échangeables soit d'ordre t.*

En effet, conservons les notations précédentes : considérons le groupe transitif F dérivé de G et Γ. S'il y a ε transformations infinitésimales indépendantes de G échangeables à toutes les transformations de G, c'est-à-dire communes à G et Γ, F a $2n-\varepsilon$ paramètres indépendants, car on a alors, entre les transformations infinitésimales de G et Γ, ε relations linéaires indépendantes à coefficients constants; si G est simple, on a $\varepsilon = 0$. Toute transformation infinitésimale de F est alors de la forme g, γ ou $g+\gamma$, g et γ étant des transformations infinitésimales de g et γ respectivement.

Soit $g+\gamma$ une transformation infinitésimale de F laissant un point $Q_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile, c'est-à-dire d'ordre ou de classe $\geqq 1$. Le sous-groupe à un paramètre $g+\gamma$ laisse ce point immobile; car, si

$$X = g+\gamma = \sum_1^n {}_i \xi_i p_i,$$

ses tranformations sont

$$x_i' = x_i + \frac{t'}{1}\xi_i + \frac{t'^2}{1.2} X\xi_i + \ldots$$

avec (¹) $\xi_i(x^0) = 0$.

Admettons que t soit l'ordre du sous-groupe T des transformations de G échangeables à g : T sera engendré par t transformations infinitésimales

$$X_1', \quad X_2', \quad \ldots, \quad X_t'$$

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 75 et 189.

indépendantes; T contiendra g. Les transformations de T sont échangeables à celles des sous-groupes $g+\gamma$ et g. $X'_1, \ldots, X_t$ remplacent respectivement Q_0 par les points infiniment voisins $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$. Ces points sont distincts; car, si Q_1 et Q_2 coïncidaient, par exemple, le produit de X'_1 par X'^{-1}_2 laisserait invariable Q_0, alors que G étant régulier ne contient aucune transformation $\neq 1$ laissant un point de position générale invariable [1]. Il en résulte de suite que le groupe $g+\gamma$ laisse invariables ces t points et tous ceux de l'élément de multiplicité plane définie par ces t points et par [2] Q_0.

Réciproquement, supposons que le groupe $g+\gamma$ laisse invariables $t+1$ points infiniment voisins distincts et de position générale Q_0, $Q_1, \ldots, Q_t$ définissant un élément de multiplicité plane à t degrés de liberté. On aura

$$g=\begin{pmatrix} Q_0, Q_1, \ldots, Q_t, \ldots \\ P_0, P_1, \ldots, P_t, \ldots \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{-1}=\begin{pmatrix} Q_0, Q_1, \ldots, Q_t, \ldots \\ P_0, P_1, \ldots, P_t, \ldots \end{pmatrix},$$

g et γ^{-1} étant ici des transformations finies.

Il existe toujours dans G une transformation infinitésimale g_1 remplaçant Q_0 par Q_1, par exemple. La transformation g_1 est de la forme

$$g_1=\begin{pmatrix} Q_0, P_0, \ldots \\ Q_1, P'_1, \ldots \end{pmatrix};$$

elle est échangeable à γ^{-1}, en sorte que $P'_1=P_1$. Alors $g_1^{-1}gg_1$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} Q_1, \ldots \\ P_1, \ldots \end{pmatrix},$$

(1) On le vérifie de suite en remarquant qu'une transformation laissant un pareil point immobile est échangeable aux transformations du conjoint ou réciproque, et se réduit à la transformation identique.

(2) Si $t=1$, on a un élément de droite; si $t=2$, un élément de plan; etc.

c'est-à-dire coïncide avec g, puisque G ne contient qu'une transformation remplaçant Q_1 par P_1.

Il en résulte que les t transformations infinitésimales $g_1, g_2, \ldots, g_t$, remplaçant Q_0 par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ respectivement, sont échangeables à g. Il en est de même alors de toutes les transformations

$$e_1 g_1 + \ldots + e_t g_t,$$

où $e_1, \ldots, e_t$ sont des paramètres arbitraires. Les transformations $g_1, \ldots, g_t$ sont, d'ailleurs, linéairement indépendantes, puisque les points $Q_1, \ldots, Q_t$ déterminent avec Q_0 un élément de multiplicité plane à t degrés de liberté. Donc le groupe des transformations de G échangeables à g est d'ordre $\geq t$. C. Q. F. D.

Remarque. — Le lemme précédent donne aussi la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe F contienne un groupe à un paramètre dont les transformations finies changent toute multiplicité passant par Q_0 et tangente en ce point à un élément plan convenablement choisi à t degrés de liberté en une multiplicité jouissant de la même propriété.

Ce qui précède va nous permettre d'indiquer d'une manière générale une limite supérieure de t pour le groupe F, quand G est simple.

En effet, il suffit d'avoir une limite supérieure approximative : le sous-groupe de G engendré par les transformations $g_1, g_2, \ldots, g_t$ est contenu dans un sous-groupe maximum H de G d'ordre η, et G est holoédriquement isomorphe à un groupe G' de degré $n - \eta$, primitif; d'après un théorème de Lie déjà cité, la classe de G' est limitée supérieurement en fonction de son degré, par suite aussi le nombre n de ses paramètres, c'est-à-dire que

$$n - \eta \geq \varphi(n),$$
$$t \leq \eta \leq \psi(n),$$

ψ étant une fonction qu'il est facile de calculer. On aura évidemment $\psi(n) < n$, et $\psi(n)$ est fonction croissante de n.

On arriverait à des résultats plus exacts en s'appuyant sur les travaux de MM. Killing et Cartan (¹). M. Cartan a déterminé la structure de tous les groupes simples : il resterait à trouver pour chaque structure une limite supérieure de l'ordre des sous-groupes de chacun de ces groupes (²). Ce problème n'a pas été, croyons-nous, complètement traité par MM. Killing et Cartan (³). Nous n'insisterons donc pas.

Nous nous contenterons d'indiquer ce qu'on obtient quand G est isomorphe au groupe projectif général. Alors (⁴) $n = p(p+2)$, et

$$r_1 \leqq p(p+1) = n - p = n + 1 - \sqrt{n+1}.$$

Le lemme précédent est important, parce qu'il permet de trouver la classe du groupe F.

Considérons d'une manière générale un groupe E de transformations de classe $s > 1$. E renferme une transformation infinitésimale

$$X = \sum_1^n \xi_i p_i,$$

laissant le point $Q_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile. Si X est de classe (ou d'ordre) 1, on a

$$\xi_i = \sum_1^n {}_\nu g'_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \ldots;$$

si X est de classe $\geqq 2$, on a

$$\xi_i = \sum_{\nu\pi}^{1\ldots n} g''_{i\nu\pi}(x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) + \ldots.$$

Le point Q, de coordonnées $x_\nu^0 + \zeta_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), est remplacé

(¹) *Voir* Cartan, *Thèse de Doct.*

(²) C'est encore là une recherche qui pourrait faire partie d'une Thèse.

(³) Cartan, *loc. cit.*, p. 148.

(⁴) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 555 et 564.

par le point

$$x'_\nu = x^0_\nu + \zeta_\nu + e\,\xi_\nu(x^0 + \zeta) + \frac{e^2}{1.2} X\xi_\nu + \ldots;$$

ζ_ν étant infiniment petit, si l'on opère sur ce point une transformation finie du groupe X.

Or

$$\xi_i(x + \zeta) = \xi_i + \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\zeta_\nu + \ldots.$$

Si X est de classe 1, $\xi_i(x^0 + \zeta)$ serait, pour au moins une valeur de i, de l'ordre de $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, quand on suppose que $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ne sont liés par aucune relation linéaire. Toute transformation finie de X remplace le point $x^0 + \zeta$ par un point infiniment voisin différent en général; ce point ne peut être laissé immobile par cette transformation que s'il existe entre les $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ certaines relations linéaires. Par conséquent, à une transformation $g + \gamma$, de classe 1 de F ne peut correspondre une transformation pour laquelle $t = n$.

Mais, si X est de classe $\geqq 2$, à des quantités près du deuxième ordre toute transformation finie du groupe X laisse invariable le point Q, c'est-à-dire tout point infiniment voisin de Q_0. Appliquant ceci au groupe F, on en conclut que F ne peut renfermer d'autres transformations infinitésimales $g + \gamma$ d'ordre $\geqq 2$ que celles pour lesquelles $t = n$, et g est échangeable à toutes les transformations de G : alors $g + \gamma$ appartient à Γ et est de classe 0.

Théorème II. — *Le groupe* F *dérivé d'un groupe régulier* G *et de son conjoint ou réciproque* Γ *est de classe* 1 *pour tout point de position générale, quand* G ≠ Γ, *et* 0 *si* G = Γ, *c'est-à-dire si* G *est formé de substitutions échangeables.*

Avant d'aller plus loin, il convient de vérifier ce qui précède sur un exemple.

Prenons le groupe G' projectif général à un paramètre, qui est simple. Il est engendré par les transformations

$$(13) \qquad x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}.$$

Considérons cette transformation S et la transformation T

$$x'' = \frac{b_1 + b_2 x'}{1 + b_3 x'}.$$

Nous aurons

$$x'' = \frac{b_1(1 + a_3 x) + b_2(a_1 + a_2 x)}{1 + a_3 x + b_3(a_1 + a_2 x)} = \frac{a'_1 + a'_2 x}{1 + a'_3 x}.$$

On en conclut

$$(14) \quad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{b_1 + b_2 a_1}{1 + b_3 a_1}, \\ a'_2 = \dfrac{b_1 a_3 + b_2 a_2}{1 + b_3 a_1}, \\ a'_3 = \dfrac{a_3 + b_3 a_2}{1 + b_3 a_1}. \end{cases}$$

Ce sont les transformations du premier groupe des paramètres [1] du groupe projectif général, que nous prendrons pour G.

On obtiendra les transformations du deuxième groupe des paramètres de G′ en permutant a et b dans les formules précédentes; ce sont

$$(15) \quad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{a_1 + a_2 b_1}{1 + a_3 b_1}, \\ a'_2 = \dfrac{a_1 b_3 + a_2 b_2}{1 + a_3 b_1}, \\ a'_3 = \dfrac{b_3 + a_3 b_2}{1 + a_3 b_1}. \end{cases}$$

Nous le prendrons pour Γ; les deux groupes (14) et (15) sont réguliers, et l'un est le conjoint ou réciproque de l'autre.

Formons leurs transformations infinitésimales : en remarquant que la transformation identique du premier groupe correspond à

$$b_1 = b_3 = 0, \qquad b_2 = 1,$$

et posant $b_1 = \omega_1$, $b_3 = \omega_3$, $b_2 = 1 + \omega_2$, ω_1, ω_2, ω_3 étant infiniment

---

(1) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 401.

petits, on obtient les transformations infinitésimales de G

$$(16)\qquad \begin{cases} g_1 = p_1 + a_3 p_2, \qquad g_2 = a_1 p_1 + a_2 p_2, \\ g_3 = a_2 p_3 - a_1(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3). \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces trois transformations engendrent un groupe isomorphe au groupe projectif général à un paramètre.

On obtient les transformations infinitésimales de Γ en remarquant que (15) se déduit de (14) par la substitution $(b_1 b_3)(a_1 a_3)(a'_1 a'_3)$; ce sont donc

$$(17)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = a_1 p_2 + p_3, \qquad \gamma_2 = a_2 p_2 + a_3 p_3, \\ \gamma_3 = a_2 p_1 - a_3(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3). \end{cases}$$

On vérifie directement que les transformations (17) sont échangeables aux transformations (16). Ces six transformations infinitésimales sont indépendantes et d'ordre 0 [1]; le groupe primitif F des transformations (16) et (17) est donc de classe $\leqq 1$ pour tout point de position générale.

On le vérifie sans peine; en effet, sinon on pourrait former une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations g et γ, $\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3$ telle que ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne contiennent, pour un point a_1^0, a_2^0, a_3^0 de position générale, aucun terme des degrés 0 et 1 en $a_1 - a_1^0, a_2 - a_2^0, a_3 - a_3^0$.

On aurait

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e_1 + e_2 a_1 - e_3 a_1^2 + e_6(a_2 - a_1 a_3), \\ \xi_2 &= e_1 a_3 + e_2 a_2 - e_3 a_1 a_2 + e_4 a_1 + e_5 a_2 - e_6 a_2 a_3, \\ \xi_3 &= e_3(a_2 - a_1 a_3) + e_4 + e_5 a_3 - e_6 a_3^2. \end{aligned}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 devraient s'annuler ainsi que leurs dérivées premières en a_1, a_2, a_3 pour $a_1 = a_1^0$, $a_2 = a_2^0$, $a_3 = a_3^0$, ce qui donne

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = 0.$$

La combinaison linéaire est donc impossible.

---

[1] Sauf pour les points du paraboloïde $a_2 - a_1 a_3 = 0$.

De plus, ici $l = 1$. F ne renferme aucun groupe à un paramètre dont les transformations finies laissent invariable un élément de plan passant par un point quelconque de position générale.

Nous avons vu tout à l'heure que, si X est d'ordre $\geqq 2$, les transformations finies du groupe X laissent invariable tout point Q infiniment voisin du point Q_0, aux infiniment petits près du deuxième ordre.

Plus généralement, si X est d'ordre $\geqq \gamma_1$, les transformations finies du groupe X laissent invariable le point Q, aux infiniment petits près du $\gamma_1^{\text{ième}}$ ordre.

Ceci peut s'interpréter géométriquement; considérons une courbe

$$(18) \qquad x_1 = \varphi_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t),$$

passant par le point Q_0 qui correspond à $t = 0$, et prenons dessus un point infiniment voisin correspondant à $t = t_1$. On aura, en posant

$$x_i + \zeta_i = \varphi_i(t),$$

$$\xi_i(x_1 + \zeta_1, \ldots, x_n + \zeta_n)$$
$$= \xi_i + \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} \zeta_\nu + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu^2} \zeta_\nu^2 + \sum_1^n {}_{\nu,\rho} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu \, \partial x_\rho} \zeta_\nu \zeta_\rho + \ldots.$$

L'ensemble des termes de ce développement de degré λ en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ est un polynome entier dont les coefficients contiennent en facteur les dérivées $\lambda^{\text{ièmes}}$ de ξ_i par rapport à $x_1, \ldots, x_n$. Donc, pour $x_1 = x_1^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$, les termes de $\xi_i(x_1 + \zeta_1, \ldots, x_n + \zeta_n)$ sont de degré $\geqq \gamma_1$ en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Alors, la transformation finie

$$x'_\nu = x_\nu + e\xi_\nu + \frac{e^2}{1 \cdot 2} X\xi_\nu + \ldots,$$

remplace le point $x_\nu^0 + \zeta_\nu$ par

$$x'^0_\nu = x_\nu^0 + \zeta_\nu + e\xi_\nu(x_\nu^0 + \zeta_\nu) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} X\xi_\nu(x_\nu^0 + \zeta_\nu) + \ldots.$$

Or, si les termes de ξ_ν sont d'ordre $\geqq \gamma_1$ en $x_i - x_i^0$, ceux de $X\xi_\nu$ sont d'ordre $\geqq 2\gamma_1 - 1$, ceux de $X^2\xi_\nu$ d'ordre $\geqq 3\gamma_1 - 2$, $\ldots$, c'est-à-dire

d'ordre $\geqq 1$ si $\eta = 1$ et $> \eta$ si $\eta > 1$. Dès lors

$$x'^0_\nu - (x^0_\nu + \zeta_\nu) = e\varpi_\nu$$

aux infiniment petits près d'ordre $\eta + 1$, ϖ_ν étant un polynome homogène de degré η en $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, indépendant de e si $\eta > 1$. Si $\eta = 1$, on aura encore

$$x'^0_\nu - (x^0_\nu + \zeta_\nu) = b_{1\nu}\zeta_1 + \ldots + b_{n\nu}\zeta_n = \sum_k \varpi_k \varphi_{\nu k}(e),$$

où ϖ_k ne dépend (¹) pas de e et est linéaire.

(¹) Quand $\eta = 1$, $x'^0_\nu - (x^0_\nu + \zeta_\nu)$ ne peut être d'ordre supérieur au premier que si $\xi_\nu(x^0 + \zeta)$ l'est : on le voit en prenant e suffisamment petit, mais fini. Si

$$\xi_\nu(x) = \sum_1^n {}_l\, g_{l\nu}(x_l - x^0_l) + \ldots, \qquad \xi_\nu(x^0 + \zeta) = \sum_1^n {}_l\, g_{l\nu}\zeta_l + \ldots,$$

et il faut

$$(18\ bis) \qquad \sum_1^n {}_l\, g_{l\nu}\zeta_l = 0,$$

aux infiniment petits près du deuxième ordre.

Réciproquement, si (18 *bis*) a lieu pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, d'après les équations

$$X\xi_\nu = \sum_i \xi_i \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i}, \qquad X^2\xi_\nu = \sum_{ki} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i}, \qquad \ldots,$$

qui ont lieu aux infiniment petits près du deuxième ordre, on a

$$\xi_\nu = 0, \qquad X\xi_\nu = 0, \qquad X^2\xi_\nu = 0, \qquad \ldots,$$

et $x'^0_\nu - (x^0_\nu + \zeta_\nu)$ est du deuxième ordre et de la forme

$$\sum_k \xi_k \varphi_{\nu k}(e) = \sum_k \varpi_k \varphi_{\nu k}(e)$$

avec

$$\varpi_k = \sum_1^n {}_l\, g_{lk}\zeta_l.$$

Exécutons alors la transformation finie X sur la courbe (18). Celle-ci est transformée en une courbe passant par le point Q_0. Le point infiniment voisin Q ou $x_\nu^0 + \zeta_\nu^0$ de Q_0 est transformé en un point $x_\nu'^0$ tel que $x_\nu'^0 - (x_\nu^0 + \zeta_\nu)$ soit du $r_1^{\text{ième}}$ ordre au moins. Donc la distance des deux points sera au moins du $r_1^{\text{ième}}$ ordre, et l'on peut dire :

Si une transformation infinitésimale X est d'ordre $\geqq r_1$ pour un point Q_0 de position générale, les transformations finies du groupe X changent toute courbe passant par le point Q_0 en une courbe ayant en ce point avec la première un contact d'ordre $r_1 - 1$ au moins.

Il reste à voir à quelles conditions ce contact sera exactement d'ordre $r_1 - 1$. Il faudra d'abord pour cela que X soit exactement d'ordre r_1. Ce n'est pas tout : pour une valeur au moins de ν, $x_\nu' - (x_\nu^0 + \zeta_\nu)$ devra être de l'ordre de $\zeta_1^{r_1}$, si l'on suppose, par exemple, $\zeta_1 \geqq \zeta_2 \geqq \ldots \geqq \zeta_n$. L'un des polynomes $\varpi_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ au moins devra donc être de l'ordre de $\zeta_1^{r_1}$. Il n'en pourra être autrement que si l'on a simultanément, aux infiniment petits près d'ordre $r_1 + 1$,

$$(19) \qquad \varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_n = 0.$$

Ceci ne pourra avoir lieu, d'après ce qu'on vient de dire, que pour des valeurs de $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ liées par n relations homogènes ; si ces relations sont indépendantes, elles seront incompatibles ; si elles ne sont pas indépendantes, les équations (19) seront celles d'une multiplicité ayant avec ses transformées par les transformations finies de X un contact d'ordre r_1. Cette multiplicité, composée de droites passant par Q_0, existera toujours dès qu'une des expressions ξ_i ne renfermera pas de termes de degré r_1 en $x_\nu - x_\nu^0$.

Nous en concluons le théorème suivant :

THÉORÈME III [1]. — *La condition nécessaire et suffisante pour*

[1] Bien que ce théorème soit sans doute connu en tout ou en partie, nous

que la transformation infinitésimale Xf soit d'ordre η pour un point Q_0 de position générale est que les transformations finies du groupe X changent toute courbe passant par Q_0 en une courbe ayant avec la première en ce point un contact d'ordre $\eta - 1$.

Le contact ne sera d'ordre plus élevé que si la courbe a en Q_0 un contact d'ordre $\geqq \eta$ avec une certaine multiplicité passant par Q_0, qui dépend de Xf, et qui peut ne pas exister.

Dans le cas où $\eta = 1$, le contact d'une courbe C passant par Q_0, et de sa transformée, en Q_0, sera d'ordre 0, c'est-à-dire que les deux courbes ne seront pas tangentes en général; mais il sera d'ordre 1 et elles seront tangentes si la courbe C est tangente en Q_0 à une certaine multiplicité plane qui peut ne pas exister. L'élément de cette multiplicité plane qui passe en Q_0 peut donc être considéré comme invariant par les transformations finies de X. Nous avons vu un exemple de cette remarque à propos du théorème II et du lemme précédent.

Ce théorème conduit à une interprétation intéressante de la classe d'un groupe. En ce qui concerne les groupes primitifs, on peut formuler un théorème de Lie ([1]) ainsi qu'il suit, à titre de corollaire du théorème précédent :

Corollaire. — Un groupe fini continu primitif de degré n ne contient aux environs du point de position générale Q_0 aucune transformation infinitésimale X telle que les transformations finies de X changent toute courbe passant par Q_0 en une courbe ayant avec elle en ce point un contact d'ordre supérieur à $2n$. S'il est de classe s aux environs de Q_0, il contient au moins une transformation infinitésimale X telle que les transformations finies de X changent toute courbe générale passant par Q_0 en une courbe ayant avec elle en ce point un contact d'ordre $s - 1$.

D'après ce qui précède, on pourrait classer les transformations d'un

---

l'avons indiqué parce qu'il est la suite naturelle de ce qui précède et à cause de son corollaire.

([1]) *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 313.

groupe non seulement en tenant compte de la classe de Lie, mais encore du nombre t de degrés de liberté de (19). On pourrait appeler *classe géométrique* du groupe le symbole (s, θ), si θ est le nombre maximum de degrés de liberté des multiplicités (19) correspondant aux transformations de classe s de G.

D'après ce qu'on a vu dans le cas du théorème II, ce symbole peut avoir des rapports plus intimes que la classe de Lie avec la classe des groupes de substitutions (¹).

Ce n'est là qu'une indication qui pourrait être utile ultérieurement.

(¹) Plus exactement, si n est le degré d'un groupe de substitutions, u sa classe, ce serait avec le nombre $n - u$: nous n'insistons pas.

Sur un théorème de M. Duhem;

PAR M. PAUL SAUREL.

M. Duhem a donné dernièrement [1] une importante généralisation d'un théorème bien connu de Clebsch. Je voudrais indiquer une démonstration qui conduit très simplement au théorème de M. Duhem.

Considérons les trois équations simultanées au dérivées partielles :

$$(1)\qquad \begin{cases} f(u) + g(\Delta u) + \dfrac{\partial}{\partial x} h(\sigma) = 0, \\ f(v) + g(\Delta v) + \dfrac{\partial}{\partial y} h(\sigma) = 0, \\ f(w) + g(\Delta w) + \dfrac{\partial}{\partial z} h(\sigma) = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, u, v, w sont des fonctions de x, y, z, t;

$$(2)\qquad f = A_0 + A_1 \frac{\partial}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n}{\partial t^n},$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des constantes;

$$(3)\qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$(4)\qquad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

---

[1] P. DUHEM, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VI, fasc. II, p. 215; 1900).

et g et h sont deux opérateurs linéaires quelconques à coefficients constants.

Des équations (1) on obtient facilement

$$(5) \qquad f(\sigma) + g(\Delta\sigma) + h(\Delta\sigma) = 0.$$

M. Duhem appelle cette équation l'*équation aux dilatations* et il l'écrit sous la forme abrégée

$$(6) \qquad \mathfrak{D}(\sigma) = 0.$$

Désignons par ω une quelconque des expressions

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On obtient facilement des équations (1)

$$(7) \qquad f(\omega) + g(\Delta\omega) = 0.$$

M. Duhem appelle cette équation l'*équation aux rotations* et il l'écrit sous la forme abrégée

$$(8) \qquad \mathfrak{R}(\omega) = 0.$$

Le théorème de M. Duhem est le suivant :

Toute solution u, v, w des équations (1) *peut être mise sous la forme*

$$(9) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \end{cases}$$

F *étant une intégrale de l'équation aux dilatations* (6), *et* P, Q, R *trois intégrales de l'équation aux rotations* (8), *ces fonctions étant*

de plus liées par la relation

$$(10) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Pour démontrer ce théorème, posons

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u', \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v', \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w', \end{aligned} \right.$$

u, v, w étant une solution donnée des équations (1). Des équations (11), on tire immédiatement

$$(12) \qquad \sigma = \Delta\Phi + \sigma',$$

où l'on a posé

$$(13) \qquad \sigma' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}.$$

Si dans les équations (1) nous substituons les valeurs de u, v, w données par les équations (11), nous trouvons

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{R}(u') + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{Q}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}h(\sigma') = 0, \\ &\mathcal{R}(v') + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{Q}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}h(\sigma') = 0, \\ &\mathcal{R}(w') + \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{Q}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}h(\sigma') = 0. \end{aligned} \right.$$

Choisissons maintenant la fonction Φ, de façon que l'on ait en même temps

$$(15) \qquad \sigma' = 0,$$

$$(16) \qquad \mathcal{Q}(\Phi) = 0.$$

L'équation (12) nous montre que nous pouvons remplacer ces conditions par les suivantes,

$$\Delta\Phi = \sigma, \tag{17}$$

$$\omega(\Phi) = 0. \tag{18}$$

S'il est possible de trouver une fonction Φ qui satisfasse à ces deux conditions, et nous montrerons plus tard qu'un tel choix est possible, les équations (11) détermineront u', v', w' et les équations (14) montrent que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{R}(u') = 0,\\ &\mathcal{R}(v') = 0,\\ &\mathcal{R}(w') = 0. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Les fonctions u', v', w' étant ainsi déterminées, nous définirons maintenant trois nouvelles fonctions p, q, r par les équations

$$\Delta p + u' = 0, \qquad \Delta q + v' = 0, \qquad \Delta r + w' = 0, \tag{20}$$

$$\mathcal{R}(p) = 0, \qquad \mathcal{R}(q) = 0, \qquad \mathcal{R}(r) = 0. \tag{21}$$

La démonstration par laquelle nous montrerons que les équations (17) et (18) sont compatibles s'applique également aux équations (20) et (21); les fonctions p, q, r sont donc déterminées.

La première des équations (20) peut s'écrire sous la forme

$$u' = -\Delta p = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Si donc nous posons

$$\Phi = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} &P = \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z},\\ &Q = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x},\\ &R = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

nous aurons

$$(24) \qquad u' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

et deux équations analogues pour v' et w'. Si nous portons ces valeurs de u', v', w' dans les équations (11) et si nous posons

$$(25) \qquad F = \Phi - \Phi',$$

nous aurons enfin

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

F est une intégrale de l'équation aux dilatations, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{D}(\Phi) - \mathfrak{D}(\Phi') = 0.$$

En effet, l'équation (18) montre que

$$\mathfrak{D}(\Phi) = 0.$$

De plus, les définitions (5) et (7) de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{R}$ nous permettent d'écrire

$$\mathfrak{D}(\Phi') = \mathfrak{R}(\Phi') + h(\Delta\Phi').$$

Alors les équations (22) et (21) montrent que

$$\mathfrak{R}(\Phi') = 0,$$

tandis que les équations (22), (20) et (15) montrent que

$$\Delta\Phi' = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = 0.$$

Ainsi

$$\omega(\Phi) = 0$$

et F est bien une intégrale de l'équation aux dilatations.

P, Q, R sont des intégrales de l'équation aux rotations, comme le montrent immédiatement les équations (23) et (21). De plus, les équations (23) montrent que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

La généralisation du théorème de Clebsch est ainsi établie si les équations (17) et (18), ainsi que les équations (20) et (21), sont compatibles.

Pour compléter notre démonstration, il faut donc montrer que l'on peut trouver une fonction Φ, telle que

$$(17) \qquad \Delta\Phi = \sigma,$$

$$(18) \qquad \omega(\Phi) = 0,$$

σ étant assujettie à la condition (6),

$$(6) \qquad \omega(\sigma) = 0.$$

Soit G une fonction, telle que

$$\Delta G = \sigma.$$

L'équation (17) nous montre que Φ ne peut différer de G que par une fonction harmonique que nous désignerons par H. Nous pouvons donc poser

$$(27) \qquad \Phi = G + H.$$

Il faut maintenant déterminer la fonction harmonique H, de telle façon que l'équation (18) soit satisfaite. Si nous substituons la valeur

de Φ donnée par l'équation (27) dans l'équation (18), nous aurons

$$\varpi(G)+\varpi(H)=0. \tag{28}$$

Comme

$$\Delta G=\sigma,$$

nous aurons, en vertu de l'équation (6),

$$\Delta\varpi(G)=\varpi(\sigma)=0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\varpi(G)=\varphi,$$

φ étant une fonction harmonique. D'autre part, comme

$$\varpi(H)=f(H)+g(\Delta H)+h(\Delta H)$$

et que H est harmonique, nous aurons

$$\varpi(H)=f(H).$$

L'équation (28) devient donc

$$f(H)+\varphi=0, \tag{29}$$

ou bien, en se rappelant la définition (2) de f,

$$A_0 H+A_1\frac{\partial H}{\partial t}+A_2\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\ldots+A_n\frac{\partial^n H}{\partial t^n}+\varphi=0. \tag{30}$$

Il reste donc à démontrer que l'on peut trouver une fonction harmonique H qui satisfasse à l'équation (30) dans laquelle φ est une fonction harmonique donnée. M. Duhem a donné de ce théorème la démonstration suivante [1] :

Si pour $t=0$, on choisit arbitrairement

$$H,\quad \frac{\partial H}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{n-1} H}{\partial t^{n-1}},$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 233.

l'équation (30) et les équations que l'on obtient en différentiant cette équation par rapport à t donneront les valeurs pour $t = 0$ des dérivées d'ordre supérieur à $n - 1$. De plus, comme φ est harmonique, on a

$$A_0 \Delta H + A_1 \Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \ldots + A_n \Delta \frac{\partial^n H}{\partial t^n} = 0.$$

Si donc, à l'instant $t = 0$, on prend pour

$$H, \quad \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} H}{\partial t^{n-1}}$$

des fonctions harmoniques quelconques, on voit que les dérivées d'ordre supérieur à $n - 1$ sont aussi pour $t = 0$ des fonctions harmoniques. Ainsi, tous les coefficients du développement de H, en série de puissances de t, sont des fonctions harmoniques; pour toutes les valeurs de t, H est donc une fonction harmonique et l'on a ainsi une fonction qui satisfait aux conditions données.

La démonstration par laquelle nous venons de démontrer que les équations (6), (17) et (18)

$$\mathcal{D}(\sigma) = 0, \qquad \Delta\Phi = \sigma, \qquad \mathcal{D}(\Phi) = 0,$$

sont compatibles, s'applique aussi bien aux équations (19), (20) et (21)

$$\mathcal{R}(u') = 0, \qquad \Delta p + u' = 0, \qquad \mathcal{R}(p) = 0.$$

Cette remarque termine la démonstration de la généralisation du théorème de Clebsch.

Notice sur M. Ch. Hermite;

Par M. C. JORDAN.

L'École mathématique française vient de perdre, en la personne de M. Hermite, son chef et son maître.

Il serait assurément téméraire de vouloir analyser à la hâte et sous le coup de la première émotion la longue suite de ses travaux, qui a jeté tant d'éclat sur toute la seconde moitié du XIXe siècle. Une pareille entreprise demande plus de temps et un esprit plus calme. Nous nous bornerons donc, en adressant à notre vénéré Confrère le suprême adieu que sa modestie nous a interdit de prononcer sur sa tombe, à indiquer à grands traits, autant que notre mémoire nous le permettra, quelques-unes des découvertes dont nous lui sommes redevables.

En 1843, M. Hermite, âgé de vingt ans, venait d'entrer à l'École Polytechnique. Sur le conseil de Liouville, il écrivit à Jacobi pour lui communiquer les résultats qu'il venait d'obtenir pour la division des fonctions abéliennes, alors à peine connues. L'illustre géomètre allemand, qui s'occupait à cette époque de l'édition de ses Œuvres, n'hésita pas à y faire figurer, à côté de ses propres travaux, la lettre de son jeune correspondant.

Il lui écrivait un peu plus tard : « Ne soyez pas fâché, Monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre. »

La prédiction du grand géomètre ne devait pas tarder à se vérifier.

Dans les quatre lettres qui suivent et que Jacobi nous a également conservées, M. Hermite s'était proposé tout d'abord de généraliser la théorie des fonctions continues; mais il se trouva bientôt amené aux problèmes plus vastes de la théorie arithmétique des formes, où il ne tarda pas à obtenir d'admirables résultats.

Dès le début de ses travaux, il indique plusieurs méthodes pour réduire les formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées. Un peu plus tard, l'introduction des variables continues dans la théorie l'amène à découvrir des vérités plus cachées.

Il donne la solution complète du problème de l'équivalence arithmétique des formes quadratiques générales ou des formes décomposables en facteurs linéaires; il détermine les transformations de ces formes en elles-mêmes; il démontre, par une voie toute nouvelle et purement arithmétique, les théorèmes célèbres de Sturm et de Cauchy sur la séparation des racines des équations algébriques. Il introduit la notion féconde des formes quadratiques à variables conjuguées et déduit de leur théorie une nouvelle démonstration des beaux théorèmes de Jacobi sur le nombre des décompositions d'un nombre en quatre carrés.

Il arrive enfin à cette merveilleuse proposition que les racines des équations algébriques à coefficients entiers et d'un même discriminant s'expriment par un nombre limité d'irrationnelles distinctes.

L'étude algébrique des formes est également l'objet de ses méditations. La notion des invariants qui domine cette théorie était restée un peu confuse, jusqu'au jour où M. Cayley la mit en pleine lumière dans un Mémoire célèbre daté de 1845. MM. Cayley, Sylvester et Hermite se partagèrent le nouveau domaine qui venait de leur être ouvert.

Leurs travaux sont tellement entrelacés dans cette rivalité fraternelle qu'il serait difficile et à peine désirable de préciser exactement la part de chacun d'eux dans l'œuvre commune. Il semble toutefois que l'on puisse attribuer spécialement à M. Hermite la loi de réciprocité, la découverte des covariants associés, celle des invariants gauches, et la formation du système complet des covariants des formes cubiques et biquadratiques et des invariants de la forme du cinquième ordre.

Ces importantes recherches d'Arithmétique et d'Algèbre ne suffi-

saient pas à son activité; il poursuivait en même temps ses études sur les transcendantes; dans une série de recherches mémorables il résolvait le problème de la transformation des fonctions hyperelliptiques, et des développements en série des fonctions elliptiques il déduisait des formules importantes relatives au nombre des classes des formes quadratiques.

Il posait en même temps les bases de la théorie des fonctions modulaires et résolvait jusque dans ses détails la question si difficile de leur transformation, donnant ainsi longtemps d'avance un modèle à ceux qui devaient de nos jours reprendre et généraliser cette théorie.

L'impression produite sur les géomètres par l'ensemble de ces travaux se résume assez bien dans ce mot pittoresque que nous avons recueilli jadis de la bouche de M. Lamé : « En lisant les Mémoires d'Hermite, on a la chair de poule. »

En 1856, à l'âge de trente-quatre ans, M. Hermite entrait à l'Institut; en 1862 on créait pour lui une chaire à l'École Normale; peu après il devint également professeur à l'École Polytechnique et à la Sorbonne.

A cette époque, l'enseignement supérieur était, il faut bien le dire, un peu arriéré. Les grandes découvertes par lesquelles Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy avaient transformé la Science pendant un demi-siècle étaient passées sous silence, comme si elles n'intéressaient que de rares initiés. M. Hermite les jeta hardiment dans le domaine public. Cette heureuse audace a porté ses fruits : témoin notre jeune et brillante école de géomètres. Tous furent des élèves d'Hermite et doivent à ses leçons, à ses bienveillants encouragements une grande part de leurs succès.

Cette royauté pacifique ne s'arrêtait pas à nos frontières : M. Hermite entretenait des correspondances dans toute l'Europe savante, et partout les jeunes talents pouvaient compter sur ses conseils et sur son appui.

Mais ni les devoirs de son enseignement, ni même les atteintes de l'âge ne purent porter préjudice à la fécondité de son esprit. De cette seconde période datent en effet un grand nombre de beaux travaux qui ne le cèdent en rien aux œuvres de sa jeunesse.

Une évolution sensible se produit pourtant dans l'objet de ses

recherches. L'Arithmétique et l'Algèbre, prédominantes jusque-là, vont céder le pas au Calcul intégral.

La transition se fait par un Mémoire célèbre sur l'équation du cinquième degré, dont il donne la résolution par les fonctions elliptiques.

Puis viennent les recherches sur l'interpolation, sur de nouveaux modes de développement des fonctions en série de polynomes, sur les discontinuités des intégrales définies qui dépendent d'un paramètre, etc.

Dans la théorie des fonctions elliptiques, M. Hermite découvre une formule fondamentale qui permet de les décomposer en éléments simples et, par suite, de les intégrer. Il étudie, le premier, les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Nous arrivons enfin au Mémoire sur la fonction exponentielle, digne couronnement de ses longues recherches sur les développements en fractions continues. Il y fait voir que le nombre e est transcendant. M. Lindemann a reconnu depuis que le nombre π l'est également. Le problème de la quadrature du cercle, si vainement cherché pendant tant de siècles, est donc démontré impossible.

On peut légitimement revendiquer pour M. Hermite une part dans ce beau résultat, car il a été obtenu en imitant la marche qu'il avait suivie pour l'exponentielle. Or, on se ferait une idée bien incomplète du rôle des grands esprits en les mesurant exclusivement sur les vérités nouvelles qu'ils ont énoncées explicitement. Les méthodes qu'ils ont léguées à leurs successeurs, en leur laissant le soin de les appliquer à de nouveaux problèmes qu'eux-mêmes ne prévoyaient peut-être pas, constituent une autre part de leur gloire et parfois la principale, comme le montre l'exemple de Leibniz.

Depuis bientôt un siècle nous travaillons à développer les germes féconds que Gauss et Cauchy ont semés dans leurs écrits; il en sera de même pour Hermite. Voici deux nouveaux exemples qui le prouvent :

Le groupe remarquable de substitutions qu'il a rencontré dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes sert d'élément essentiel à la solution d'un problème tout différent, celui de la résolution des équations par radicaux. Il apparaît encore dans la discussion de la seconde variation des intégrales définies.

Les formes quadratiques à variables conjuguées sont le fondement indispensable des recherches sur la réduction des formes les plus générales, à coefficients réels ou complexes.

M. Hermite aimait la Science pour elle-même et ne se préoccupait guère des applications; elles sont venues spontanément et par surcroît. A l'équation de Lamé, dont l'intégration constitue le dernier de ses grands travaux, il a rattaché toute une série de problèmes de Mécanique : rotation d'un solide; détermination de la courbe élastique; oscillations du pendule conique.

Pour se faire une idée exacte de la place que M. Hermite occupait dans le monde mathématique, il faut avoir assisté comme nous aux fêtes inoubliables de son jubilé en 1892. Tous ses amis, ses disciples, ses admirateurs s'étaient donné rendez-vous à cette touchante cérémonie; toutes les Sociétés savantes de l'Europe avaient envoyé des adresses ou des délégués.

La même année a vu le Jubilé de Pasteur. Aujourd'hui Pasteur et Hermite ne sont plus; il ne nous reste que le souvenir de leurs exemples et leurs ouvrages, mais ceux-ci suffisent à éterniser leur mémoire.

Que l'on nous permette, en terminant, d'exprimer un vœu au nom de la Section de Géométrie. L'œuvre d'Hermite est fort éparpillée; en dehors des principaux Mémoires, elle contient beaucoup de lettres ou notes concises dispersées çà et là, mais qui portent toutes la griffe du lion. L'Académie s'honorerait et rendrait un grand service aux Géomètres en entreprenant la publication des Œuvres complètes de Charles Hermite.

Sur les fonctions abéliennes singulières;
(Troisième Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Les couples de périodes normales des fonctions abéliennes auxquelles conduit le problème d'inversion, appliqué à une courbe de genre deux, sont du type

$$(1,0); \quad (0,1); \quad (g,h); \quad (h,g');$$

et si g_1, h_1, g'_1 désignent les parties imaginaires de g, h, g', la quantité

$$h_1^2 - g_1 g'_1$$

est *essentiellement négative*.

Existe-t-il des fonctions uniformes de deux variables, admettant quatre couples de périodes du type précédent, *dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif?*

Ce sujet se lie étroitement à la théorie des fonctions abéliennes singulières, qui a fait l'objet de deux Mémoires publiés dans ce Journal (5e série, t. V et VI) : les fonctions dont il s'agit d'entreprendre l'étude n'existent, en effet, que si g, h, g' vérifient une de ces relations qui caractérisent les fonctions abéliennes singulières

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

C'est pour cette raison que nous désignerons les fonctions à étudier sous le nom de *fonctions quadruplement périodiques singulières,* en gardant celui d'*abéliennes* pour les fonctions qui correspondent au cas de $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif.

La théorie de la *transformation* établit entre les deux classes de fonctions un lien plus intime encore : les transformations singulières *de degré négatif,* dont nous avons réservé explicitement l'étude, font passer d'un système de périodes pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif à un système analogue pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, et réciproquement ; en d'autres termes, les fonctions abéliennes singulières et les fonctions quadruplement périodiques singulières se transforment ainsi les unes dans les autres.

Les divers paragraphes du présent Mémoire ont pour objets principaux :

1° La recherche des conditions d'existence des fonctions quadruplement périodiques singulières, et leur expression par des quotients de fonctions intermédiaires nouvelles;

2° La transformation de ces fonctions, et les transformations de degré négatif des fonctions abéliennes singulières;

3° Les propriétés principales des nouvelles fonctions intermédiaires;

4° L'étude du cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est nul : je montre qu'il y a alors dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Nota. — Les numéros de ce Travail font suite à ceux de nos deux Mémoires précédents; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier ou du second, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I ou II.

Existence et expression des fonctions quadruplement périodiques singulières.

251. Soit $(1,0)$; $(0,1)$; (g,h); (h,g') un système de périodes pour les variables u et v, avec la condition fondamentale

$$h_1^2 - g_1 g'_1 > 0, \qquad (1)$$

g_1, h_1, g'_1 désignant les parties imaginaires de g, h, g'. Il résulte d'un

beau théorème de M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII) que toute fonction uniforme $F(u, v)$, admettant les quatre paires de périodes précédentes, est le quotient de deux fonctions *entières* de u, v, appartenant à la classe des *fonctions intermédiaires*, c'est-à-dire se reproduisant, multipliées par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, quand u et v augmentent d'une période.

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle,

$$e^{au^2+2buv+cv^2+du+fv},$$

on peut déterminer les constantes a, b, c, d, f de manière que le produit obtenu, $\varphi(u, v)$, vérifie (I, n° **20**) les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)e^{\theta u}, \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{\lambda u+\mu v+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'}. \end{cases}$$

Les deux premières de ces relations ne sont compatibles que si

$$\theta = -2\pi i n,$$

n étant entier; de même la première et la seconde, combinées successivement avec les deux autres, donnent

$$\lambda = -2\pi i l; \qquad \lambda' = 2\pi i l';$$
$$\mu = 2\pi i(m - ng); \qquad \mu' = 2\pi i(m' - n' h),$$

l, m, l', m' étant entiers. Enfin, par la combinaison des deux dernières relations (2), on obtient

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2\pi i q,$$

q étant entier. En y remplaçant λ, μ, λ', μ' par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$(3)\qquad l' g + (m' + l)h - m g' - n(h^2 - g g') + q = 0.$$

252. Si les entiers l', $m'+l$, m, n, q sont nuls à la fois, la relation (3) est satisfaite quels que soient g, h, g' : dans ce cas, les quantités θ, μ, λ', qui figurent dans les équations (2), sont nulles; λ et μ' sont égaux à $-2\pi i l$, et dès lors ces équations (2) sont du type de celles qui caractérisent les fonctions thêta de u, v, formées avec les périodes (1,0); (0,1); (g, h); (h, g'). Mais cette conclusion est inadmissible, cas les séries thêta, construites avec ces périodes, sont divergentes à cause de l'inégalité fondamentale (1) : $h_1^2 - g_1 g'_1 > 0$.

Il est donc nécessaire, pour l'existence de fonctions $\varphi(u, v)$ vérifiant les relations (2), que les coefficients numériques dans l'équation (3) ne soient pas nuls simultanément, c'est-à-dire que les quantités g, h, g', $h^2 - gg'$ doivent être liées par une relation linéaire à coefficients entiers : c'est ce que j'ai appelé, dans les Mémoires I et II, une *relation singulière* entre les périodes.

253. Soit alors

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \tag{4}$$

cette relation, les entiers A, B, ..., E étant supposés sans diviseur commun. En écrivant que le premier membre de (3) est identique à celui de (4), multiplié par un facteur entier, $-k$, on trouve

$$l' = -Ak; \quad m'+l = -Bk; \quad m = Ck; \quad n = Dk; \quad q = -Ek,$$

de sorte que les relations (2) deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i D k u}, \\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i [lu - (C - Dg)kv] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v) e^{-2\pi i [Aku + (l + Bk + Dkh)v] + \nu'}. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\varphi(u, v)$ est donc ce que j'ai appelé (II, n° **165**) une *fonction intermédiaire singulière*, formée avec les périodes g, h, g', liées par (4); les entiers l et k sont ses *indices*.

Il s'agit maintenant de chercher si de pareilles fonctions existent lorsque $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif : le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif a été complètement étudié dans les premiers Mémoires.

Invariant et réduction de la relation singulière.

254. Un certain nombre de résultats et de démonstrations, donnés par d'autres ou par nous pour le cas des périodes normales, s'étendent sans changement au cas actuel $(h_1^2 - g_1 g'_1 > 0)$; indiquons les plus utiles pour notre objet.

255. La théorie ordinaire de la transformation, créée par M. Hermite, demeure applicable, dans les conditions suivantes :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables U et V, admettant les quatre couples de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'); soit de même un second système analogue, de variables u et v, et de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'); on pose

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

λ, λ', μ, μ' étant des constantes, et l'on cherche à déterminer ces constantes et les périodes g, h, g', en fonction de G, H, G', ou inversement, de manière qu'à un système u, v, donné aux périodes près, ne corresponde qu'un système U, V, aux périodes près.

La transformation est dite *ordinaire* lorsque, dans cette recherche, on fait abstraction de toute relation liant g, h, g'.

Les résultats fondamentaux obtenus par M. Hermite, pour les transformations ordinaires, subsistent alors même que $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif; rien n'est à changer aux démonstrations. Par exemple, pour une *transformation d'ordre k*, les périodes g, h, g' s'expriment, en fonction de G, H, G', par les équations classiques [où $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$]

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},\\ h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [2(ad)_{03} - k]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\ g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\ h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}G + 2(cd)_{03}H + (cd)_{02}G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\end{aligned}\right.$$

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont des entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k :

$$(ad)_{01} + (bc)_{01} = (ad)_{02} + (bc)_{02}$$
$$= (ad)_{13} + (bc)_{13} = (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,$$
$$(ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = k.$$

De ces formules M. Hermite a déduit la suivante

$$(7) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{k^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1).$$

$\mathfrak{M}^2$ désignant une quantité réelle positive, et G_1, H_1, G'_1, les parties imaginaires de G, H, G′. En d'autres termes, $h_1^2 - g_1 g'_1$ et $H_1^2 - G_1 G'_1$ sont toujours de même signe, c'est-à-dire que :

Une transformation ordinaire change une fonction quadruplement périodique singulière de U, V en une fonction analogue de u, v.

256. Pour compléter ce résultat, observons que la relation singulière (4), entre g, h, g', conduit, en vertu de (6), à une relation singulière entre G, H, G′; et réciproquement, si G, H, G′ vérifient une relation singulière, il en est de même de g, h, g'.

Dès lors, on établit, comme dans mon premier Mémoire (nos **1-5**), que :

Une transformation ordinaire du premier ordre change la relation singulière (4)

$$(4) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable.

Nous l'appellerons encore l'*invariant* de la relation (4).

257. *Réciproquement*, il résulte des nos **4** à **13** du premier Mémoire que deux relations singulières de même invariant sont réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre : les démonstrations ne font, en effet, aucune hypothèse sur le signe de $h_1^2 - g_1 g_1'$.

Dès lors, si Δ est son invariant, la relation singulière (4) peut se ramener au type

$$-\frac{\Delta}{4} g + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4\text{N};$$

$$-\frac{\Delta - 1}{4} g + h + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4\text{N} + 1.$$

Mais nous n'avons pas le droit de dire ici que l'invariant est un nombre essentiellement positif, car la démonstration (I, **14**) suppose $h_1^2 - g_1 g_1'$ négatif; nous parviendrons plus loin à ce résultat d'une manière différente.

Fonctions intermédiaires singulières.

258. Cela posé, pour étudier les fonctions intermédiaires singulières, nous avons le droit de supposer la relation singulière (4) ramenée au type

$$(8) \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

où α, β, γ sont entiers et sans diviseur commun. Dans ce cas, les relations (5), où l'on fait $\text{A} = \alpha$, $\text{B} = \beta$, $\text{C} = \gamma$, $\text{D} = \text{E} = 0$, deviennent

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [lu - k\gamma v] + \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [k\alpha u + (l + \beta k) v] + \nu}; \end{cases}$$

et il s'agit de reconnaître s'il existe des fonctions uniformes entières vérifiant ces relations (9), dans lesquelles l et k désignent deux entiers, jusqu'ici arbitraires.

259. Imitons, à cet effet, la méthode de notre premier Mémoire (I, n^{os} **21-29**), en distinguant deux cas, selon que la quantité δ

$$\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 \tag{10}$$

est nulle ou non.

Si $\delta = 0$, il faut que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de (8), soit un carré parfait, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = n^2$; on est alors placé dans un cas elliptique (I, n° **15**) et les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes se réduisent, pour $\delta = 0$, à des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable: la démonstration, donnée au n° **25** du premier Mémoire, est encore valable, car elle suppose seulement que $h_1^2 - g_1 g_1'$ n'est pas nul.

Laissant de côté le cas de $\delta = 0$, nous pouvons, puisque $\delta \gtrless 0$, faire dans la fonction $\varphi(u, v)$ le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= -(l + \beta k)\mathrm{U} - k\gamma \mathrm{V}, \\ v &= \quad - k\alpha \mathrm{U} \quad - \quad l\mathrm{V}, \end{aligned}$$

et nous reconnaissons (I, n° **24**) que $\varphi(u, v)$ devient une fonction $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, vérifiant les relations

$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} \theta(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1) &= \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}), \\ \theta(\mathrm{U}+\mathrm{G}, \mathrm{V}+\mathrm{H}) &= \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i \delta \mathrm{U} + \text{const}}, \\ \theta(\mathrm{U}+\mathrm{H}, \mathrm{V}+\mathrm{G}') &= \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i \delta \mathrm{V} + \text{const.}}; \end{aligned} \right.$$

$$\theta\left(\mathrm{U} - \frac{l}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(\mathrm{U} + \frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{l+\beta k}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}). \tag{12}$$

On a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{G} &= -lg + k\gamma h, \\ \delta\mathrm{H} &= -lh + k\gamma g' = -k\alpha g - (l+\beta k)h, \\ \delta\mathrm{G}' &= \qquad\qquad\quad\; -k\alpha h - (l+\beta k)g'. \end{aligned}$$

Les relations (11) montrent que $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ est une fonction thêta, de U, V, formée avec les périodes (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G');

pour qu'il existe de telles fonctions, deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° Si G_1, H_1, G'_1 désignent les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1 G'_1$ soit négatif; or, en vertu des expressions ci-dessus,

$$\begin{aligned}\delta^2(H_1^2 - G_1 G'_1) &= [-k\alpha g_1 - (l+\beta k)h_1](-lh_1 + k\gamma g'_1) \\ &\quad - [-k\alpha h_1 - (l+\beta k)g'_1](-lg_1 + k\gamma h_1) \\ &= \delta(h_1^2 - g_1 g'_1).\end{aligned}$$

Ainsi $H_1^2 - G_1 G'_1$ a le signe de $\delta(h_1^2 - g_1 g'_1)$; comme, par hypothèse, $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, il est nécessaire que l'on ait

(13) $\qquad \delta < 0, \qquad$ c'est-à-dire $\qquad l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 < 0.$

2° En second lieu, δ, ordre de la fonction $\theta(U, V)$, doit avoir un signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 doit être positif :

(14) $$-lg_1 + k\gamma h_1 > 0.$$

Si les inégalités (13) et (14) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta, $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (11); il faut chercher maintenant si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient aussi les relations (12). Le raisonnement du n° **27** du Mémoire I s'applique encore sans modification, en remplaçant δ par sa valeur absolue, mod δ, et l'on reconnaît que les fonctions $\theta(U, V)$, vérifiant (11) et (12), sont des fonctions linéaires et homogènes de mod δ d'entre elles.

260. En résumé, les conditions (13) et (14)

$$\delta < 0 \qquad \text{et} \qquad -lg_1 + k\gamma h_1 > 0$$

sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions intermédiaires singulières vérifiant les relations (9), c'est-à-dire d'*indices* l et k, dans l'hypothèse où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif.

261. *Remarque*. — Pour que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$, puisse être négatif, il est nécessaire que les racines de ce trinome

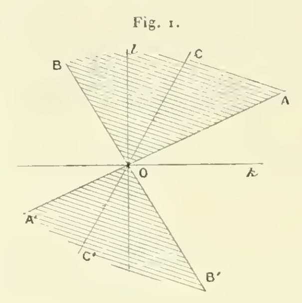
en l et k soient réelles et inégales, c'est-à-dire que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

En d'autres termes, l'*invariant* de la relation singulière qui lie les périodes doit être *positif*, comme dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif.

262. Cela posé, on peut donner une autre forme à l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$. A cet effet, regardons l et k comme les coordonnées

Fig. 1.



d'un point dans un plan, et construisons les deux droites *réelles*, AOA' et BOB', qui ont pour équation

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0.$$

La condition $\delta < 0$ exprime que le point l, k n'est pas, par rapport aux droites AOA', BOB' dans la région qui contient l'axe des l, c'est-à-dire que ce point doit se trouver dans la région non ombrée.

Construisons de même la droite $-lg_1 + k\gamma h_1 = 0$; cette droite, COC', est dans la région ombrée, car si l'on fait $l = \gamma h_1$, $k = g_1$ dans le trinome $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve, en tenant compte de ce que $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, quantité positive. L'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ ne sera donc vérifiée, *dans la région non ombrée,* que par les points de l'*un* des deux angles AOB' ou BOA'.

Pour reconnaître quel angle convient, observons que la droite

$2l + \beta k = 0$ est dans la région non ombrée, car si l'on fait $l = -\frac{1}{2}\beta$, $k = 1$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve $-\frac{1}{4}(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$, résultat négatif. Remplaçons alors l et k par $-\frac{1}{2}\beta$ et 1 dans $-lg_1 + k\gamma h_1$, nous obtenons $\frac{1}{2}(2\gamma h_1 + \beta g_1)$; si cette quantité est positive, l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sera vérifiée dans celui des deux angles AOB' et BOA' pour lequel la coordonnée k est positive; ce sera l'inverse si $2\gamma h_1 + \beta g_1 < 0$.

En résumé, les deux conditions $\delta < 0$ et $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sont équivalentes aux suivantes

$$(15) \qquad \delta < 0 \quad \text{et} \quad k(2\gamma h_1 + \beta g_1) > 0;$$

et l'on peut énoncer ce théorème :

263. *Soit un système de périodes* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), *entre lesquelles existe la relation singulière*

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

α, β, γ *étant entiers sans diviseur commun; désignons par* g_1, h_1, g'_1 *les parties imaginaires de* g, h, g', *et supposons*

$$h_1^2 - g_1 g'_1 > 0.$$

Pour qu'il existe des fonctions INTERMÉDIAIRES SINGULIÈRES, $\varphi(u, v)$, *d'indices* l *et* k, *c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v) \\ \qquad \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu - k\gamma v] + \nu}, \\ \qquad \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'}, \end{cases}$$

où ν *et* ν' *sont deux constantes données, il faut et il suffit :*

1° *Que les indices (entiers)* l *et* k *soient tels que la quantité*

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$$

soit négative;

2° *Que l'indice k ait le signe de la quantité*

$$2\gamma h_1 + \beta g_1.$$

Les fonctions $\varphi(u, v)$ *vérifiant les relations précédentes s'expriment alors en fonction linéaire et homogène de* mod δ *d'entre elles,* δ *désignant* $l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$.

Développements en série des fonctions intermédiaires.

264. En augmentant u et v de constantes convenables, on peut faire en sorte que, dans les équations (9), les constantes ν et ν' aient des valeurs particulières

$$\nu = -\pi i[lg - k\gamma h]; \qquad \nu' = -\pi i[k\alpha h + (l + \beta k) g'].$$

La fonction entière $\varphi(u, v)$, qui vérifie les deux premières relations (9), peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$\varphi(u, v) = \sum_{m, n} A_{mn} e^{2\pi i(mu + nv)}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs posons (I, n° **59**)

$$A_{mn} = B_{mn} e^{\pi i(G_0 m^2 + 2H_0 mn + G'_0 n^2)},$$

où G_0, A_0, G'_0 désignent les quantités

$$G_0 = \frac{1}{\delta}[(l + \beta k) g + k\gamma h],$$

$$H_0 = \frac{1}{\delta}[(l + \beta k) h + k\gamma g'] = \frac{1}{\delta}[-k\alpha g + lh],$$

$$G'_0 \qquad\qquad = \frac{1}{\delta}[-k\alpha h + lg'].$$

En exprimant que la série $\varphi(u, v)$ vérifie les deux dernières relations (9), on trouve

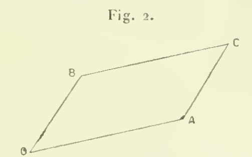
$$B_{m,n} = B_{m+l, n-k\gamma} = B_{m-k\alpha, n+l+k\beta}.$$

Ainsi $B_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l+k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $B_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l-ik\gamma$, $k\alpha+i(l+k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points O, A, B, C de coordonnées :

$$\text{O}: x=0, y=0; \qquad \text{B}: x=k\alpha, \quad y=l+k\beta;$$
$$\text{A}: x=l, y=-k\gamma; \qquad \text{C}: x=l+k\alpha, y=-k\gamma+l+k\beta.$$

L'aire de ce parallélogramme est $\operatorname{mod}\delta$; il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, $\operatorname{mod}\delta$ points de coordonnées entières; soit p, q un de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux

Fig. 2.



points homologues du réseau correspondent, dans $\varphi(u,v)$, les termes pour lesquels $m=p+l\rho+k\alpha\sigma$, $n=q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u,v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i[p+l\rho+k\alpha\sigma]u+2\pi i[q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma]v} \times e^{\pi i f(p+l\rho+k\alpha\sigma,\, q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma)},$$

$f(x,y)$ désignant la forme quadratique $G_0x^2+2H_0xy+G'_0y^2$; et ρ, σ prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Comme p et q peuvent recevoir $\operatorname{mod}\delta$ systèmes de valeurs, répondant aux points à coordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que la fonction $\varphi(u,v)$ est une fonction linéaire et homogène des $\operatorname{mod}\delta$ fonctions $\Phi_{p,q}(u,v)$, dont on a les développements en séries de Fourier. Ces séries sont convergentes comme on le reconnaît aisément en s'appuyant sur les inégalités $\delta<0$ et $-lg_1+k\gamma h_1>0$.

265. *Fonctions quadruplement périodiques singulières.* — Une quelconque de ces fonctions sera, d'après le théorème rappelé plus haut de M. Appell, le quotient de deux fonctions intermédiaires $\varphi(u, v)$, c'est-à-dire le quotient de deux combinaisons linéaires et homogènes de séries $\Phi_{p,q}(u, v)$, où l'on remplacera u et v par $u +$ const., $v +$ const. Ces séries, tant au numérateur qu'au dénominateur, correspondront aux mêmes valeurs des indices l et k, valeurs quelconques d'ailleurs, vérifiant seulement les inégalités fondamentales (15).

Transformation.

266. La théorie des transformations singulières, comprenant comme cas particulier celle des transformations ordinaires et telle que nous l'avons présentée dans notre second Mémoire (n^os **156** et suivants), s'applique sans changement au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif. Voici l'énoncé général du problème :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables, U *et* V, *admettant comme périodes les quantités* (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'); *soit de même un second système analogue, de variables u et v et de périodes* (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G') : *les quantités* $H_1^2 - G_1 G_1'$ et $h_1^2 - g_1 g_1'$ *peuvent avoir un signe quelconque, c'est-à-dire que les fonctions du premier et du second système peuvent être soit abéliennes, soit quadruplement périodiques singulières. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions du second, et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v; \tag{1}$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ *désignant des constantes.*

Il résulte du Mémoire II que, si g, h, g' sont liés par une relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{2}$$

les relations qui lient les périodes G, H, G' et g, h, g' sont

$$G = \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02}g + [(bc)_{02} + (da)_{02}]h + (db)_{02}g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$G' = \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31}g + [(bc)_{31} + (da)_{31}]h + (db)_{31}g' + (ab)_{31}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$-H = \frac{(cd)_{03} + (ac)_{03}g + [(bc)_{03} + (da)_{03}]h + (db)_{03}g' + (ab)_{03}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$H = \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12}g + [(bc)_{12} + (da)_{12}]h + (db)_{12}g' + (ab)_{12}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$H^2 - GG' = \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01}g + [(bc)_{01} + (da)_{01}]h + (db)_{01}g' + (ab)_{01}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + [(bc)_{23} + (da)_{23}]h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

où l'on a posé $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$.

Dans ces formules, les seize quantités a_i, b_i, c_i, d_i sont les *entiers caractéristiques* de la transformation; ils vérifient les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} (ac)_{03} + (ac)_{12} &= Ak, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= Ck, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= Dk, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= Ek, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12} &= Bk, \end{aligned}\right.$$

k désignant un entier, d'ailleurs quelconque.

Inversement, g, h, g' et $h^2 - gg'$ sont donnés par des formules analogues (II, nº **158**), en fonction de G, H, G' et $H^2 - GG'$; et l'on en déduit que si g, h, g' vérifient une relation singulière, il en est de même de G, H, G' et réciproquement.

267. Le *degré* de la transformation est la valeur du déterminant $(a_0 b_1 c_2 d_3)$; nous le désignerons par δ.

Les *indices* de la transformation sont deux entiers, l et k :

$$(4)\qquad l = (ad)_{03} + (ad)_{12};$$

et k est l'entier qui figure dans les formules (3), avec la convention faite (II, nº **141**) pour préciser son signe.

Entre le degré et les indices existe la relation

$$(5)\qquad \delta = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

Si $k = 0$, la transformation est ordinaire; le degré est alors le carré de l'ordre, $\delta = l^2$.

Soit Δ l'invariant de la relation singulière (2) entre g, h, g'; soit de même Δ' celui de la relation singulière correspondante entre G, H, G'; on a (II, n° **142**)

$$k^2\Delta = k'^2\Delta',$$

k' désignant un entier, ce qui montre que Δ et Δ' sont de même signe, comme cela devait être, puisque nous savons que l'invariant d'une relation singulière est positif, quel que soit le signe de $h_1^2 - g_1 g'_1$ (I, n° **14** et III, n° **261**).

268. *Signe du degré.* — A un *point* (u, v), c'est-à-dire à un système de valeurs de u, v, déterminées aux périodes près, la transformation considérée fait correspondre, par hypothèse, un seul point (U, V); inversement (II, n° **145**), à un point (U, V) elle fait correspondre un nombre de points (u, v) égal à son degré en valeur absolue, c'est-à-dire égal à mod δ.

Les indices l et k étant des entiers quelconques, et l'invariant

$$B^2 - 4AC - 4DE$$

étant positif, le nombre δ, donné par (5), peut être *soit positif, soit négatif*.

Il résulte, de plus, du Mémoire II (n° **144** ou n° **161**) que l'on a, entre les parties imaginaires des périodes g, h, g' et G, H, G', la relation

$$(6)\qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive.

De là cette conséquence importante que :

Les transformations de degré positif font passer d'un système

de fonctions abéliennes ou de fonctions quadruplement périodiques singulières à un système de même nature.

Les transformations de degré négatif font passer d'un système de fonctions abéliennes à un système de fonctions quadruplement périodiques singulières, et réciproquement.

269. Les théorèmes et formules relatifs à la composition de deux transformations, à la réduction d'une transformation, à la transformation des fonctions intermédiaires singulières, subsistent sans modification, alors même que $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif et δ négatif.

En particulier, les transformations de degré -1 sont données, à une transformation ordinaire près d'ordre un, par les formules (II, n° **166**)

$$U = lu - \gamma k v, \qquad V = ku + (l + \beta k)v, \tag{7}$$

en supposant g, h, g' liés par la relation singulière (où $\alpha = 1$, comme on a le droit de l'admettre)

$$g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

Dans ces formules, l et k sont les indices de la transformation considérée; ils vérifient la relation $\delta = -1$, c'est-à-dire

$$l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = -1 \qquad \text{ou} \qquad (2l + \beta k)^2 - \Delta k^2 = -4. \tag{8}$$

Quant aux périodes des fonctions en U et V, elles ont pour expression

$$\left\{\begin{aligned} G &= lg - \gamma k h, \\ H &= lh - \gamma k g' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' & = kh + (l + \beta k)g', \\ &\text{d'où} \\ -g &= (l + \beta k)G + \gamma k H, \\ -h &= (l + \beta k)H + \gamma k G' = -kG + lH, \\ -g' & = -kH + lG', \end{aligned}\right. \tag{9}$$

elles sont liées aussi par la relation

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

On démontre (H, n° **180**) que toutes ces transformations sont les puissances *impaires* d'une même transformation de degré — 1.

270. De là résultent des conséquences intéressantes pour la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières.

1° Trois fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique. Car une transformation de degré négatif les change en trois fonctions abéliennes de u, v, aux mêmes périodes.

2° Soit un système de fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'), ou plus simplement (G, H, G'). Pour que ce système admette des transformations de degré — 1, il faut et il suffit, comme on le reconnaît par (8), que la forme

$$x^2 - \Delta y^2,$$

où Δ désigne l'invariant de la relation singulière en G, H, G', puisse représenter le nombre — 4.

Si cette condition est réalisée, une quelconque des transformations correspondantes de degré — 1 change *toute* fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes (G, H, G'), en une fonction *abélienne* (n° **268**) de u, v, dont les périodes (g, h, g') sont liées à G, H, G' par (9). Réciproquement, la transformation inverse change *toute* fonction abélienne de u, v, aux périodes g, h, g', en une fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes G, H, G' : dans ces transformations, les *points* u, v et U, V se correspondent d'une manière univoque.

En d'autres termes, *dans le cas considéré, la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières se confond exactement avec celle des fonctions abéliennes.*

Au point de vue de la théorie des surfaces, la conséquence est la suivante :

Appelons *surface hyperelliptique* toute surface algébrique pour

laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions uniformes de deux paramètres à quatre paires de périodes : trois fonctions quadruplement périodiques singulières étant liées (1°) par une relation algébrique, déterminent ainsi une surface hyperelliptique; cette surface sera dite *générale* si, à un de ses points, ne répond qu'un système de valeurs des paramètres, aux périodes près.

D'après ce qui précède, si l'invariant Δ d'un système de fonctions quadruplement périodiques singulières est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ puisse représenter -4, toute surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions de ce système, sera aussi une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions abéliennes (singulières).

Les fonctions quadruplement périodiques considérées ne conduisent donc pas à de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*.

3° Si la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne peut représenter le nombre -4, les conclusions sont différentes.

Les fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes (G, H, G') et d'invariant Δ, n'admettent pas alors de transformation de degré -1. Une transformation de degré négatif, δ, les change toujours en fonctions abéliennes de u, v; mais en fonctions abéliennes *particulières;* car à un système U, V, la transformation considérée fait correspondre mod δ systèmes u, v, qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition de constantes (parties aliquotes de périodes); les fonctions abéliennes de u, v obtenues par cette transformation ne changent donc pas quand on augmente les variables, u et v, de certaines quantités, différentes des périodes.

Dès lors, une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions quadruplement périodiques singulières dont l'invariant Δ est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne puisse représenter -4, ne sera jamais une surface hyperelliptique *générale* correspondant a des fonctions abéliennes. On suppose, bien entendu, que les périodes des fonctions singulières considérées ne sont liées que par une seule relation singulière.

On obtiendra donc, dans ce cas, de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*, échappant, comme surfaces *générales*, à la représentation paramétrique par les fonctions abéliennes.

La liaison de ces surfaces avec la courbe de genre deux est la suivante : Une surface hyperelliptique générale, S, représentable par des fonctions abéliennes, correspond *point par couple* (II, n° **181**) à une courbe C, de genre deux, c'est-à-dire qu'à un point de S répond un couple sur C, et réciproquement. Si S n'est pas une surface générale, à un de ses points correspondent q systèmes d'arguments abéliens ($q > 1$), et par suite à un point de S répondent q couples sur C, tandis qu'à un couple de C ne répond toujours qu'un point de S.

Soit maintenant $-4N$ le plus petit multiple négatif de 4 (en valeur absolue) que puisse représenter la forme $x^2 - \Delta y^2$; il résulte de (8) qu'il existera des transformations de degré $-N$ pour les fonctions quadruplement périodiques singulières d'invariant Δ. Une de ces transformations changera les fonctions considérées de U, V en fonctions abéliennes de u, v, de manière qu'à un point U, V répondent N points u, v (n° **268**): une surface elliptique *générale,* représentable paramétriquement par les fonctions quadruplement périodiques en question, sera donc liée à une courbe C, de genre deux, de telle sorte qu'à un couple sur la courbe réponde un seul point de la surface, mais qu'à un point de la surface répondent N couples sur la courbe.

Propriétés des fonctions intermédiaires singulières.

271. Il s'agit, bien entendu, des fonctions intermédiaires singulières qui correspondent au cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif; le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif a été traité dans les deux précédents Mémoires.

Soit toujours

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \qquad (h_1^2 - g_1 g'_1 > 0),$$

la relation singulière entre les périodes d'une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; celle-ci vérifie les relations (5) du n° **255**

$$\varphi(u + 1, v) = \varphi(u, v),$$
$$\varphi(u, v + 1) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i D k u},$$
$$\varphi(u + g, v + h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [l u - (C - D g) k v] + \nu},$$
$$\varphi(u + h, v + g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [A k u + (l - B k + D k h) v] + \nu'}.$$

Opérons sur cette fonction une transformation d'indices l_1 et k_1, faisant passer des variables u, v aux variables u', v'; soit

$$(2) \qquad A_1\mathcal{G} + B_1\mathcal{H} + C_1\mathcal{G}' + D_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + E_1 = 0,$$

la relation singulière entre les périodes de u', v'; désignons par Δ et Δ_1 les invariants des relations (1) et (2); la transformation considérée change $\varphi(u, v)$ en une fonction intermédiaire de u', v', aux périodes $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$, et dont les indices l_2 et k_2 sont donnés par les relations (II, n° **165**) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} 2k_2 &= k_1(2l + Bk) + \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + B_1 k_1), \\ 2(2l_2 + B_1 k_2) &= (2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}; \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles ε_1 désigne ± 1, selon une règle déterminée (II, n^{os} **165**, **142** et **149**).

272. *Corollaire.* — Deux fonctions intermédiaires singulières, correspondant à une même relation singulière (1), d'indices l et k, l' et k', ont toujours un nombre de zéros communs, abstraction faite des multiples des périodes, égal à la valeur absolue de

$$(4) \qquad 2ll' + B(kl' + lk') + 2(AC + DE)kk'.$$

Le théorème a été établi (II, n° **165**, *Remarque*) pour le cas de $h_1^2 - g_1 g_1' < 0$. Dans le cas contraire, une transformation de degré négatif, δ_1, change les deux fonctions de u, v considérées en fonctions analogues de u', v', pour lesquelles $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1\mathcal{G}_1'$ est négatif, et dont les indices, l_2 et k_2, l_2' et k_2' sont donnés par (3). De plus, à un système u', v' ne répond qu'un système u, v, tandis qu'à un système u, v répondent mod δ_1 systèmes u', v'. Le nombre des zéros communs aux deux fonctions d'indices l_2 et k_2, l_2' et k_2', en u', v', étant par ce qui précède

$$(5) \qquad 2l_2 l_2' + B_1(k_2 l_2' + l_2 k_2') + 2(A_1 C_1 + D_1 E_1)k_2 k_2',$$

celui des zéros communs aux deux fonctions en u et v primitives, d'indices l et k, l' et k', s'obtiendra en divisant ce nombre par mod δ_1 : en remplaçant l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (3), on retombe ainsi sur le nombre (4), pris en valeur absolue. C. Q. F. D.

273. *Fonctions intermédiaires normales.* — En désignant par $\omega, \omega', \theta, \theta'$ des nombres égaux à 0 ou 1, on donnera, pour les fonctions intermédiaires normales, d'indices l et k, et de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$ la même définition que dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$. Par exemple, en supposant la relation singulière entre g, h, g' ramenée au type

$$\alpha g + \beta h + g' = 0,$$

les équations auxquelles satisfont les fonctions intermédiaires normales, d'indices l, k, de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$, sont (I, n° **57**)

$$\begin{aligned} F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v), \\ F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v), \\ F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} F(u, v) e^{2\pi i[-lu+kv]+\pi i[-lg+kh]}, \\ F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} F(u, v) e^{-2\pi i[k\alpha u+(l+k\beta)v]-\pi i[k\alpha h+(l+k\beta)g']}. \end{aligned}$$

La caractéristique nulle est celle qui répond à $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

Parmi les fonctions intermédiaires, les seules qui puissent être paires ou impaires sont les fonctions normales.

274. Cela posé, les théorèmes sur le nombre des fonctions normales, paires et impaires, d'indices et de caractéristique donnés, qu'on a obtenus dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, s'étendent sans nouvelle démonstration au cas actuel; dans les théorèmes énumératifs, il suffira de remplacer la quantité δ :

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2,$$

laquelle est ici négative (n° **260**), par son module.

Par exemple :

Le nombre des fonctions normales singulières d'indices l et k, et

de caractéristique nulle, paires ou impaires, linéairement distinctes, est donné par le tableau

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*		$\frac{\operatorname{mod}\delta+1}{2}$	$\frac{\operatorname{mod}\delta-1}{2}$	
δ *pair*	k pair	$\frac{\operatorname{mod}\delta+4}{2}$	$\frac{\operatorname{mod}\delta-4}{2}$	$(\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2)$
	k impair	$\frac{\operatorname{mod}\delta+2}{2}$	$\frac{\operatorname{mod}\delta-2}{2}$	$(h_1^2-g_1g_1'>0)$

De même, *toutes* les fonctions normales paires, de caractéristique et d'indices donnés, ou *toutes* les fonctions impaires, s'annulent pour une demi-période quelconque; sous une autre forme, les fonctions paires s'annulent pour certaines demi-périodes, les fonctions impaires s'annulent pour les autres (I, n° **56**). Les valeurs de ces demi-périodes, données dans le Mémoire I (n^{os} **56-65**) pour le cas de $h_1^2-g_1g_1'<0$, s'appliquent encore au cas actuel; faisons seulement observer ici qu'il n'y a plus lieu de considérer, sur une surface de Kummer, les courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction normale paire ou impaire : dans le Mémoire I, cette surface de Kummer avait les coordonnées homogènes d'un de ses points exprimables par certaines fonctions *thêta*, aux périodes (g, h, g'); or, dans le cas actuel, $h_1^2-g_1g_1'$ étant positif, de pareilles fonctions thêta n'existent plus.

Par exemple, en nous bornant aux fonctions de *caractéristique nulle*, d'indices l et k :

1° *Si δ est impair, les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta+1)$ *fonctions paires s'annulent pour six demi-périodes; et les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta-1)$ *fonctions impaires, pour les dix autres.*

2° *Si δ est pair et k pair, les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta+4)$ *fonctions paires ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période; et les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta-4)$ *fonctions impaires s'annulent pour les seize demi-périodes.*

3° *Si δ est pair et k impair, les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta+2)$ *fonctions paires s'annulent pour quatre demi-périodes; et les* $\frac{1}{2}(\operatorname{mod}\delta-2)$ *fonctions impaires, pour les douze autres.*

275. *Somme des zéros communs à deux fonctions intermédiaires.* — C'est un problème que nous n'avons pas traité dans nos deux premiers Mémoires; nous nous bornerons à donner sans démonstration le résultat, applicable aussi bien au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est négatif qu'à celui où il est positif.

Soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

la relation singulière entre les périodes; les deux fonctions intermédiaires considérées peuvent évidemment (nº **264**) se mettre sous les formes

$$F_{l,k}(u-\lambda, v-\mu) = 0, \qquad F_{l',k'}(u-\lambda', v-\mu');$$

λ, μ, λ', μ' étant des constantes, et $F_{l,k}(u, v)$, $F_{l',k'}(u, v)$ des fonctions normales de caractéristique nulle, d'indices respectifs l et k, l' et k'.

On trouve assez aisément pour les sommes des valeurs de u et v qui sont les zéros communs aux deux fonctions

$$\begin{aligned}\sum u &= (ll' + \alpha\gamma kk')(\lambda + \lambda') \\ &\quad + \beta(lk'\lambda + kl'\lambda') - \gamma(kl' - lk')(\mu - \mu'), \\ \sum v &= (ll' + \alpha\gamma kk')(\mu + \mu') \\ &\quad + \beta(lk'\mu' + kl'\mu) + \alpha(kl' - lk')(\lambda - \lambda'),\end{aligned}$$

à des périodes près.

Cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est nul.

276. Nous terminerons ce Mémoire par l'étude des fonctions uniformes de u, v, admettant les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), dans l'hypothèse, écartée jusqu'ici, où $h_1^2 - g_1 g_1' = 0$.

Je dis qu'il y a nécessairement, dans ce cas, dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Admettons en effet que les quatre paires de périodes soient distinctes; les raisonnements des nºs **251-257** continuent à s'appliquer et établissent :

1º Que les périodes (g, h, g') sont liées par une relation singulière;

2° Que les fonctions uniformes à étudier sont des quotients de fonctions intermédiaires singulières;

3° Que la relation singulière peut se ramener, par une transformation ordinaire du premier ordre, au type $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, la quantité $h_1^2 - g_1 g'_1$ restant nulle après la transformation.

277. Tout revient donc à l'étude des fonctions entières, $\varphi(u, v)$ vérifiant les relations (9) du n° **258**

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i (lu - k\gamma v) - \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [k\alpha u + (l - \beta k) v] - \nu'}. \end{cases}$$

Si les indices l et k sont tels que $\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$ ne soit pas nul, le raisonnement du n° **259** ramène $\varphi(u, v)$ à une fonction *thêta*, $\theta(U, V)$, aux périodes (G, H, G'), et l'on a trouvé

$$\delta(H_1^2 - G_1 G'_1) = h_1^2 - g_1 g'_1,$$

ce qui montre que $H_1^2 - G_1 G'_1$ est nul; la fonction *thêta* $\theta(U, V)$ ne peut donc pas exister, d'où même conclusion pour $\varphi(u, v)$.

Les fonctions entières $\varphi(u, v)$, satisfaisant aux relations (6) ci-dessus ne peuvent, par suite, exister que si δ est nul; il est nécessaire pour cela que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait, n^2. Cette relation pourra dès lors se ramener au type de même invariant

$$nh - 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{1}{n},$$

et la fonction intermédiaire $\varphi(u, v)$ vérifiera les équations (5) du n° **255**, qui deviennent ici

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i l u - \nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i (l + nk) v - \nu'}. \end{cases}$$

On reconnaît comme tout à l'heure qu'une pareille fonction ne peut exister que si $\delta = 0$, c'est-à-dire si $l^2 + nkl = 0$; d'où les deux hypothèses

$$l = 0, \qquad l + nk = 0.$$

278. Soit d'abord $l = 0$: on a

$$\varphi\left(u + g, v + \frac{1}{n}\right) = \varphi(u, v)e^{\nu},$$

d'où

(8) $$\varphi(u + ng, v + 1) = \varphi(u + ng, v) = \varphi(u, v)e^{\nu''},$$

ν'' étant une constante. La fonction $\varphi(u, v)$ étant uniforme et admettant, par rapport à u ou v seul, la période 1, peut se développer en série de Fourier

$$\varphi(u, v) = \sum A_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(\rho u + \sigma v)}.$$

Exprimons qu'elle vérifie (8): il vient

$$A_{\rho,\sigma} e^{2\pi i \rho n g} = A_{\rho,\sigma} e^{\nu''},$$

d'où

(9) $$\rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda,$$

λ désignant un entier.

Deux cas sont maintenant à distinguer selon que la relation (9) a lieu, ou non, pour plus d'une valeur de ρ.

1° Si elle n'est vérifiée que pour une seule valeur de l'entier ρ, soit ρ_0 cette valeur; la série $\varphi(u, v)$ s'écrit

$$\varphi(u, v) = e^{2\pi i \rho_0 u} \sum A_\sigma e^{2\pi i \sigma v} = e^{2\pi i \rho_0 u}\psi(v),$$

et les relations (7) montrent que $\psi(v)$ est une fonction *thêta* de la variable v.

C'est un cas de dégénérescence.

2° Si la relation (9) est vérifiée pour deux valeurs ρ_0 et ρ, c'est-à-dire si

$$\rho_0 n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda_0; \qquad \rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda,$$

on en tire

$$n(\rho - \rho_0) g = \lambda - \lambda_0,$$

c'est-à-dire que g est une fraction, $g = \frac{p}{q}$.

En ce cas, il y a *réduction du nombre des périodes*, ou, ce qui revient au même, on obtient une période nulle en combinant les périodes initiales. Car si x, y et z sont des entiers, les quantités

$$x + zg \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + z\frac{p}{q},$$

$$y + zh \quad \text{c'est-à-dire} \quad y + z\frac{1}{n},$$

forment une période, qui peut évidemment se réduire à (0, 0) par un choix convenable des entiers x, y, z.

279. Le cas où $l + nh$ serait nul donne lieu aux mêmes conclusions, et le théorème est établi.

Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur. Détermination des lignes de courant;

PAR M. C. SAUTREAUX.

I.

Introduction. Rappel de quelques résultats. — Nous avons établi, dans un travail précédent [1], qu'un point de la surface libre d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur a des coordonnées (x, y) exprimées par les formules suivantes :

$$2x = S(w),$$

$$2y = \int \sqrt{\frac{8}{\frac{g}{2}S(w) + K} - S'^2(w)}\,dw.$$

Dans ces formules, $S(w)$ désigne une fonction arbitraire de la quantité complexe $w = \varphi + i\psi$; g est l'accélération de la pesanteur; enfin K désigne une constante dont la valeur est $K - \frac{p_0}{\mu} + C = gx_0 + \frac{1}{2}V_0^2$; x_0 désigne l'abscisse du point où la paroi cesse et où commence la sur-

---

(1) *Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble*, t. VI, n° 1.

face libre, p_0 la pression, V_0 la vitesse en ce point, μ la densité du liquide.

Si l'on pose

$$z = x + iy \qquad \text{et} \qquad \zeta = \frac{dz}{dw} = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

nous avons également établi que ζ est racine de l'*équation fondamentale* suivante :

$$\zeta^2 - S'(w)\zeta + \frac{2}{\frac{g}{2}S(w) + K} = 0.$$

Dans le Mémoire auquel nous faisons allusion, nous nous occupions spécialement de la *détermination de la surface libre*.

Dans le travail actuel nous nous proposons un but différent : *l'étude des trajectoires* que parcourent les molécules fluides. Nous allons faire cette étude sur un exemple, en donnant à la fonction $S(w)$ une forme déterminée. Les résultats trouvés dans cet exemple feront comprendre la marche générale à suivre dans un pareil problème et montreront que des méthodes relativement faciles conduisent aux conclusions cherchées.

II.

Équations du problème. — Prenons pour $S(w)$ la fonction $e^{-w} + \alpha$ (α constante arbitraire). L'équation fondamentale devient

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{2}{\frac{g}{2}e^{-w} + \frac{g}{2}\alpha + K}.$$

Pour simplifier l'écriture supposons que la force constante qui agit parallèlement à Ox, au lieu d'être la pesanteur même, soit une force constante d'accélération $g = 16$ (au lieu de 9.8) et supposons que la constante arbitraire α soit telle que $8\alpha + K = 0$. Il reste

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{e^{-w}} = 0.$$

On en tire

$$2\zeta = 2\xi + 2i\eta = -e^{-w} \pm \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}};$$

d'où

$$2z = 2x + 2iy = \int \left(-e^{-w} \pm \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}} \right) dw.$$

III.

Champ w d'intégration. — La première question qui se pose maintenant est de déterminer, d'une manière précise, le chemin le long duquel doit être prise cette intégrale. Rendons-nous compte de la position dans le plan w des points critiques du radical $\sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}}$, car le champ de l'intégration en dépend, ainsi que la valeur de l'intégrale.

Les zéros du radical sont les racines de l'équation

$$e^{-3w} = 1;$$

d'où

$$\varphi = 0$$

et

$$\psi = 0 \qquad (w_0),$$

$$\psi = \frac{2\pi}{3} \qquad (w_1),$$

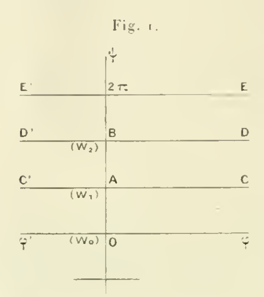
$$\psi = \frac{4\pi}{3} \qquad (w_2).$$

On a ainsi les points O, A, B, ..., sur l'axe des ψ dans le plan w (*fig.* 1).

Or, nous considérons une aire z limitée par deux lignes de courant $\psi =$ const.; il lui correspond donc dans le plan w une bande limitée par deux parallèles à l'axe $O\varphi$. Pour que ces aires se correspondent d'une façon uniforme il faut que cette bande ne renferme aucun point critique du radical à son intérieur. Nous prendrons donc successivement chacune des bandes $\varphi\varphi'$CC', CC'DD', DD'EE' pour domaine de w.

Ce qui nous conduira à trois cas différents. Nous considérerons d'abord le cas où le domaine de w est la bande $CC'D'D$; puis celui où ce

Fig. 1.



domaine est la bande $\varphi\varphi'CC'$; enfin celui où ce domaine est $DD'EE'$.

Il faudra de plus, pour que la représentation puisse être conforme, que, dans le champ de l'intégration, la dérivée $\frac{dz}{dw}$, c'est-à-dire ζ, ne puisse devenir nulle. Nous pourrons satisfaire à cette condition en choisissant convenablement la détermination de z de façon que, si le point critique $w = -\infty$, pour lequel $\zeta = 0$, est dans le champ d'intégration, il soit seulement sur la limite extrême de ce champ et, par suite, puisse être considéré comme extérieur.

IV.

Domaine ζ correspondant à la bande $CC'D'D$. — Rendons-nous compte des propriétés du domaine ζ répondant à la bande $CC'D'D$ que nous avons découpée dans le plan w. Cherchons en particulier dans le plan ζ la représentation des trajectoires $\psi = \text{const.}$ comprises dans cette bande.

Remarquons à ce sujet que l'on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

d'où

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}[v_x + iv_y]}{\frac{1}{4}V^2},$$

en désignant par V la vitesse du point considéré (x, y) du fluide et par v_x et v_y les projections de cette vitesse sur les axes Ox et Oy. Or nous avons posé $\zeta = \rho e^{i\theta}$; il vient donc

$$\xi = \rho\cos\theta = \frac{2v_x}{V^2}, \qquad \eta = \rho\sin\theta = \frac{2v_y}{V^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{2}{V}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

On voit que si l'on mène une droite du point $\zeta = 0$ au point courant ζ, l'inverse du rayon vecteur ainsi obtenu sera la moitié de la vitesse V au point (x, y) répondant à ζ, et ce rayon vecteur sera parallèle à la tangente à la trajectoire au point (x, y). L'étude des courbes du plan ζ donnera donc déjà de précieuses indications sur les trajectoires véritables du fluide en mouvement.

Étude des courbes ζ. — Pour trouver ces courbes du plan ζ, partons de l'équation fondamentale

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{e^{-w}} = 0;$$

or $\zeta = \rho e^{i\theta}$; il vient

$$\rho^2 e^{2i\theta} + \rho e^{-\varphi - i\psi + i\theta} + \lambda e^{\varphi + i\psi} = 0, \qquad \lambda = \tfrac{1}{4};$$

d'où

$$\rho^2\cos 2\theta + \rho e^{-\varphi}\cos(\psi - \theta) + \lambda e^{+\varphi}\cos\psi = 0,$$

$$\rho^2\sin 2\theta - \rho e^{-\varphi}\sin(\psi - \theta) + \lambda e^{+\varphi}\sin\psi = 0.$$

Éliminons φ pour avoir le faisceau des courbes du plan ζ répondant aux diverses trajectoires $\psi = \text{const}$. Nous tirons de là

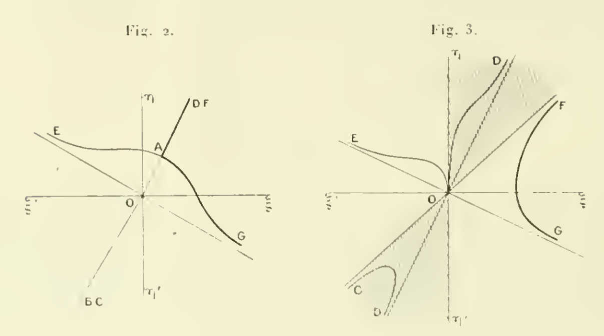
$$e^{-\varphi} = -\rho\frac{\sin(2\theta - \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)},$$

$$e^{\varphi} = \frac{\rho^2}{\lambda} \times \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)};$$

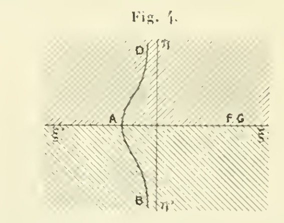
d'où l'équation du faisceau

$$\rho^3 = -\frac{\lambda \sin^2(\theta - 2\psi)}{\sin(\theta + \psi)\sin(2\theta - \psi)}.$$

Nous avons indiqué dans des figures la forme de ces courbes, ψ prenant les valeurs les plus remarquables de $\frac{2\pi}{3}$ à $\frac{4\pi}{3}$ (*fig.* 2 à 6).



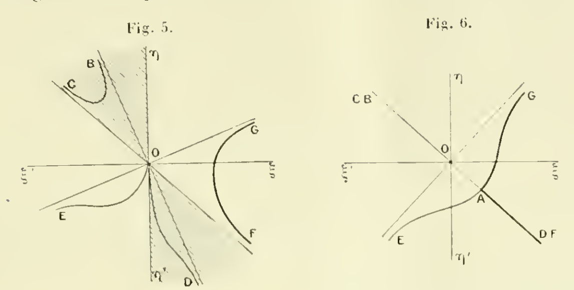
Nous avons marqué en trait fort les seules parties utiles de ces courbes. On doit supprimer en effet, comme ne convenant pas à la



question, certaines branches des courbes : 1° Car φ devant être réel, e^φ doit être positif; or $e^\varphi = \frac{\rho^2}{\lambda} \times \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)}$. On ne doit donc prendre que les parties de ces courbes pour lesquelles l'inégalité

$$\sin(\theta + \psi)\sin(\theta - 2\psi) > 0$$

est satisfaite. Nous avons couvert de hachures les parties du plan où cette inégalité n'est pas vérifiée.



2° Et l'on doit laisser de côté la courbe qui passe par l'origine ($\zeta = 0$ devant être évité).

On voit que c'est la seule branche FG qui correspond à la trajectoire cherchée. Dans le cas de $\psi = 135°$ (*fig.* 3), par exemple, c'est bien évident; pour les cas limites, tels que $\psi = 120°$, $\psi = 240°$, on cherchera la branche utile sur la figure correspondant à une valeur de ψ voisine de 120° ou de 240° et l'on en conclura, par continuité, les *fig.* 2 et 6.

Remarquons que les courbes répondant à $\psi = \psi_0$ et à $\psi = 2\pi - \psi_0$ sont symétriques par rapport à l'axe $O\xi$. Cette symétrie fait présager une symétrie analogue des trajectoires par rapport à l'axe de la pesanteur.

On saisit ainsi la déformation continue des trajectoires et *grâce à cette continuité* nous pouvons limiter sans embarras le domaine ζ, qui répond à la bande CC'DD' que nous envisageons dans le plan w.

Passons à la détermination analytique de ce domaine ζ.

V.

Limites exactes de ce domaine. I. *Première limite.* — Prenons la racine ou la détermination

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}},$$

qui pour $x = -\infty$ ne donne pas $\zeta = 0$, tandis que la seconde racine le donnerait.

Pour $\psi = \frac{2\pi}{3}$ on a

$$2\zeta = 2\xi + 2i\eta = -e^{-\varphi}e^{-\frac{2i\pi}{3}} - \sqrt{e^{-2\varphi-\frac{4i\pi}{3}} - e^{\varphi+\frac{2i\pi}{3}}}.$$

Or

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{-\frac{4i\pi}{3}},$$

d'où

$$(1)\qquad 2\xi + 2i\eta = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right).$$

Le radical sera réel si l'on a

$$e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}} > 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{-3\varphi} > 1 \qquad \text{ou} \qquad \varphi < 0.$$

Nous aurons donc deux cas à distinguer :

Premier cas : $\varphi < 0$. — L'égalité (1) donne alors

$$2\xi = \cos\frac{2\pi}{3}\left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right),$$

$$2\eta = -\sin\frac{2\pi}{3}\left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right).$$

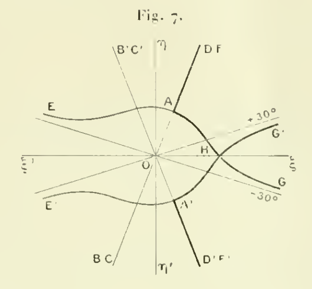
On en déduit

$$\frac{\eta}{\xi} = -\operatorname{tang}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tang} 60^\circ,$$

ce qui indique que la portion correspondante de la trajectoire fluide sera une droite. D'ailleurs, le facteur $-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}$ est négatif; donc ξ et η sont positifs; pour $\varphi = -\infty$, ξ et η sont infinis. On voit que cette portion de limite du domaine ζ est la portion de droite DFA de la figure faite pour $\psi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ et que nous reproduisons ici assemblée avec la figure répondant à $\psi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$ (*fig.* 7).

Deuxième cas : $\varphi > 0$. — L'égalité (1) se transforme, car le radical passe du réel à l'imaginaire en s'annulant et en changeant de signe.

Fig. 7.



Cette égalité devient

$$(2)\quad 2\xi + 2i\eta = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(-e^{-\varphi} + i\sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\right),$$

d'où

$$2\xi = -e^{-\varphi}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = \quad e^{-\varphi}\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}.$$

On en déduit

$$4(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{e^{-\varphi}}, \qquad \text{ou} \qquad 4\rho^2 = \frac{1}{e^{-\varphi}} = \frac{16}{V^2}.$$

Pour $\varphi = +\infty$, on a $\xi = +\infty$, $\eta = -\infty$ et

$$\frac{\eta}{\xi} = \cot\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tang} 30^\circ.$$

La limite correspondante du domaine ζ est donc l'arc de courbe AG.

II. *Seconde limite*. — Des considérations toutes semblables nous donneront la limite du domaine ζ pour $\psi = \frac{4\pi}{3}$. Pour abréger, remarquons qu'on passe de la première limite à la seconde en changeant i

en $-i$, car

$$e^{-\frac{4i\pi}{3}} = e^{-i\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

On aura donc une limite F′A′G′ symétrique de la précédente par rapport à l'axe $O\xi$.

Remarques. — On voit que les courbes FG et F′G′, qui limitent en partie le domaine ζ à considérer, se coupent en H sur l'axe des ξ. Les trajectoires correspondantes du fluide auront des tangentes parallèles à Ox aux points répondant à H. Ce fait est évidemment général. Chaque fois que les représentations dans le plan ζ de deux trajectoires se couperont en un point H, les trajectoires véritables auront aux points H_1 et H'_1, répondant à H sur chacune des lignes de courant, des tangentes parallèles entre elles.

Pour que les deux trajectoires ne se traversent pas, il faut que, en chacun des points de l'une quelconque des deux trajectoires, la direction de la vitesse soit unique; et c'est suffisant, car, s'il en est ainsi, les deux trajectoires se touchent tout au plus sans se traverser. Il faut donc que, à chaque valeur de ρ, pour $\psi = \psi_0$, réponde une seule valeur de $\tan g\theta$ ou de θ à π près. Il faut donc que le long de la courbe dont l'équation est

$$\rho^3 = -\frac{\lambda \sin^2(\theta - 2\psi_0)}{\sin(\theta + \psi_0)\sin(2\theta - \psi_0)},$$

il y ait une seule valeur de θ (à π près) répondant à chaque point, c'est-à-dire que la portion utile de cette courbe n'ait pas l'origine pour point multiple. C'est ce qui a lieu pour la courbe conservée FG. Nous retrouvons ainsi, par des considérations purement mécaniques, la condition donnée par la représentation conforme, à savoir que le point $\zeta = 0$ doit être évité.

Si, dans le mouvement d'un fluide on était amené à prendre pour les courbes à conserver dans le plan ζ des arcs ayant $\zeta = 0$ pour point multiple, plusieurs trajectoires du fluide viendraient se couper en un même point Z répondant à $\zeta = 0$. En ce point Z la vitesse V serait infinie, car $\rho = \frac{2}{V}$. Si ce point Z pouvait être à distance finie, on devrait le considérer comme un *gouffre* ou comme une *source*.

En général, l'équation fondamentale

$$\zeta^2 - S'(w)\zeta + \frac{2}{\frac{g}{2}S(w) + K} = 0,$$

n'admet la racine $\zeta = 0$ que pour $\frac{g}{2}S(w) + K = \infty$, c'est-à-dire pour un pôle w de $S(w)$ et, par suite, de $S'(w)$. Il peut n'y avoir de pôle de la fonction $S(w)$ qu'à distance infinie, comme pour $S(w) = e^{-w} + \alpha$. Si le pôle est à distance finie, le point correspondant à ce pôle est une source ou un gouffre.

Une seule des déterminations de ζ devient nulle en ce pôle de $S(w)$, la somme $S'(w)$ des racines n'étant pas nulle, mais infinie : la deuxième détermination est infinie et répond à $V = 0$, *région stagnante*. Ce point peut, dans cette seconde détermination, répondre à une région finie ou même infinie du plan z, car module $\frac{dz}{dw}$, c'est-à-dire

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} = \infty,$$

$\frac{ds}{d\sigma}$ étant le rapport de similitude des plans z et w.

VI.

Domaine z correspondant : Première trajectoire limite. — Faisons correspondre l'origine ($x = 0, y = 0$) au point w_1

$$\left(\varphi = 0, \psi = \frac{2\pi}{3}\right).$$

Nous aurons, pour représenter la fonction z le long de la limite CC' de la bande CDC'D', la formule

$$2z = 2x + 2iy = \int_{w_1}^{w} \left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}}\right) dw.$$

1° *Sur* $\alpha_1 C$ *où* $\varphi < 0$, $\psi = \frac{2\pi}{3}$, nous aurons donc

$$2z = 2x + 2iy = \int_0^{\varphi} \left(- e^{-\varphi - \frac{2i\pi}{3}} - \sqrt{e^{-2\varphi - \frac{4i\pi}{3}} - \frac{1}{e^{-\varphi - \frac{2i\pi}{3}}}} \right) d\varphi,$$

ou, en nous aidant de réductions faciles déjà indiquées dans le paragraphe précédent,

$$2x = \cos\frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \left(- e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} \right) d\varphi,$$

$$2y = - \sin\frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \left(- e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} \right) d\varphi.$$

représentant la droite

$$y = x \operatorname{tang} 60^\circ.$$

Pour $\varphi = -\infty$, en quel point de cette droite est le mobile? Les coordonnées sont

$$2x = -\tfrac{1}{2} \left(e^{-\varphi} - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\, d\varphi \right),$$

$$2y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(e^{-\varphi} - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\, d\varphi \right),$$

et prennent la forme $\infty - \infty$ pour $\varphi = -\infty$. On peut écrire ces expressions, par exemple, la première

$$-4x = e^{-\varphi} \left(1 - \frac{\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\, d\varphi}{e^{-\varphi}} \right).$$

Or

$$\left(\frac{\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\, d\varphi}{e^{-\varphi}} \right)_{\varphi = -\infty} = \left(\frac{\sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}}{-e^{-\varphi}} \right)_{\varphi = -\infty} = -\left(\sqrt{1 - e^{3\varphi}} \right)_{\varphi = -\infty} = -1.$$

d'où

$$-4x' = 2(e^{-\varphi})_{\varphi=-\infty} = +\infty.$$

On a donc, pour $\varphi = -\infty$, $x' = -\infty$.

On verra de la même façon que $y' = -\infty$ pour $\varphi = -\infty$. Le mobile apparaît donc dans le troisième quadrant; ses vitesses v_x et v_y sont positives; le mobile s'avance jusqu'à l'origine sur la droite dont l'équation est $y = x\sqrt{3}$. Cette première partie de la trajectoire peut être assimilée à une paroi plane; pour la distinguer, nous dirons que le reste de la trajectoire est la portion libre; cherchons-la.

2° *Sur* $\omega_1 C$ *où* $\varphi > 0$, $\psi = \frac{2\pi}{3}$ nous aurons

$$2z = 2x + 2iy = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\int_0^\varphi \left(-e^{-\varphi} + i\sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\right)d\varphi,$$

ou, en se servant de réductions déjà indiquées plus haut

$$2x = -\cos\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi e^{-\varphi}d\varphi + \sin\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi,$$

$$2y = \sin\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi e^{-\varphi}d\varphi + \cos\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi,$$

ou

$$2x = (e^{-\varphi} - 1)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi,$$

$$2y = -(e^{-\varphi} - 1)\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi.$$

Cette portion libre de la trajectoire part du point (o, o) tangente à la droite $y = x\,\mathrm{tang}\,60°$, au-dessus de l'axe des x. C'est ce qu'on vérifie sur la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{e^{-\varphi}\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}}{-e^{-\varphi}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}}.$$

Il serait aisé, comme nous l'indiquons brièvement dans une Note, à

la fin de ce travail, de ramener aux quadratures l'équation entre x et y de cette portion libre de la trajectoire, φ étant éliminé. Mais ce calcul n'est pas nécessaire et nous allons chercher directement, à l'aide des expressions précédemment écrites de x et de y en fonction de φ, la forme générale de cette trajectoire.

On a

$$2\frac{dx}{d\varphi} = -e^{-\varphi}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} = \tfrac{1}{2}e^{-\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\frac{dy}{d\varphi} = +e^{-\varphi}\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}.$$

On voit que $\frac{dy}{d\varphi}$ peut s'annuler pour une valeur de φ, tandis qu'il ne peut en être de même de $\frac{dx}{d\varphi}$. La valeur de φ qui annule $\frac{dy}{d\varphi}$ est racine de l'équation

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\varphi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

d'où l'on tire

$$e^{-3\varphi} = \tfrac{1}{4},$$

d'où

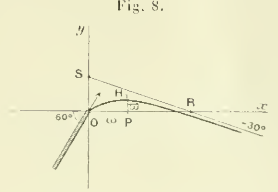
$$\varphi = \tfrac{1}{3}\log 4.$$

Cette valeur de φ est bien dans le champ que nous parcourons pour la trajectoire libre. $\frac{dx}{d\varphi}$ est toujours positif. On voit donc que, lorsque x croît de 0 à $+\infty$, x croît constamment dans le même sens; il croît d'ailleurs jusqu'à $+\infty$. Au point de vue du sens de la variation, on peut donc remplacer la variable φ par x, qui varie dans le même sens, et l'on obtient le Tableau suivant

x.	$\frac{dy}{dx}$.	y.
0	$\sqrt{3}$	0
	+	croît
ω	0	ϖ maximum
	$-$	décroît
$+\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\infty$

où ω désigne la valeur de x répondant à $\varphi = \frac{1}{3}\log 4$ et ϖ la valeur correspondante de y. De là on déduit la forme générale de la trajectoire (*fig.* 8).

Fig. 8.



Cherchons l'équation de l'asymptote SR à cette trajectoire. Le coefficient angulaire est la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $\varphi = +\infty$, ce qui donne $\cot\frac{2\pi}{3}$. L'angle ORS est donc de 30°. L'ordonnée à l'origine OS est

$$\mathrm{OS} = \lim_{\varphi=+\infty}\left(\frac{1-e^{-\varphi}}{2\sin\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dans une Note, à la fin de ce travail, nous ferons le calcul numérique des longueurs ω et ϖ. Nous trouverons

$$\omega = 0,238854, \qquad \varpi = 0,07571.$$

VII.

Seconde trajectoire limite. Veine liquide. Pression. — Cherchons la fonction z le long de la seconde limite DD′ de la bande CC′DD′. Nous partagerons l'intégrale z en deux; la première répondra à $\int_{w_1}^{w_2}$ le long de l'axe des ψ, la seconde sera $\int_{w_2}^{w}$ le long de DD′. Nous aurons ainsi pour la nouvelle limite

$$\begin{aligned}2z &= 2x + 2iy \\ &= \int_{w_1}^{w_2}\left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right)dw + \int_{w_2}^{w}\left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right)dw.\end{aligned}$$

Un calcul que nous indiquerons à la fin de ce Mémoire donne

$$\int_{w_1}^{w_2}\left(-e^{-w}-\sqrt{e^{-2w}-e^{w}}\right)dw = i\times 3,982.$$

Il vient donc, le long de DD′,

$$\begin{aligned}2z &= 2x+2iy\\ &= i\times 3,982+\int_0^{\varphi}\left(-e^{-\varphi-\frac{4i\pi}{3}}-\sqrt{e^{-2\varphi-\frac{2i\pi}{3}}-e^{\varphi-\frac{4i\pi}{3}}}\right)d\varphi\end{aligned}$$

ou, après réduction,

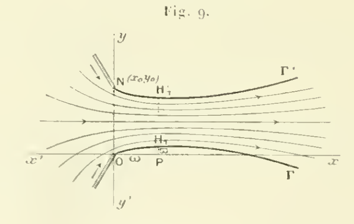
$$2z = i\times 3,982+\left(\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\int_0^{\varphi}\left(-e^{-\varphi}-\sqrt{e^{-2\varphi}-e^{\varphi}}\right)d\varphi$$

ou

$$2z = i\times 3,982+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\int_0^{\varphi}\left(-e^{-\varphi}-\sqrt{e^{-2\varphi}-e^{\varphi}}\right)d\varphi,$$

on voit donc que, en laissant pour un instant de côté le terme constant $i\times 3,982$, cette expression de $2z$ ne diffère de celle de la première

Fig. 9.



limite que parce que i est changé en $-i$. On obtiendra donc une trajectoire symétrique de la première. Pour $\varphi = 0$, on a

$$2x_0 = 0, \qquad 2y_0 = 3,982;$$

c'est le point N où la partie rectiligne de cette trajectoire se raccorde avec la partie courbe. Ce point étant ainsi bien déterminé, nous pou-

vons tracer la trajectoire qui y passe et nous obtenons la *fig.* 9.

On a donc une espèce d'ajutage convergent dont l'angle au sommet vaut 120° : le fluide sort de cet ajutage, éprouve une contraction maxima en $H_1 H'_1$ puis se dilate ; $H_1 H'_1$ est la *section contractée*.

D'ailleurs le long de ces trajectoires Γ et Γ′ la pression n'est pas constante. Ce ne sont donc pas des surfaces libres au sens étroit que nous avions attaché à ce mot dans nos Mémoires précédents ; et, en effet, les équations de la surface libre dans ce fluide sont bien différentes de celles de ces trajectoires, ainsi que le montrent les équations rappelées au début de ce travail. Il faudrait donc imaginer que cette veine fluide débouche dans un autre fluide et que les parties extérieures à la veine appartiennent à cet autre fluide. Ce fluide extérieur n'est pas en équilibre, car la pression le long de Γ ni de Γ′ n'est la pression hydrostatique ; il est donc animé, par contact avec la veine, d'un mouvement qui, par continuité, doit se raccorder (au sens de la vitesse près) avec celui de la veine ; nous disons au sens de la vitesse près, car la pression ne dépend que du carré de la vitesse ; de pareilles discontinuités de vitesse sont fréquentes dans les courants tranquilles découpés par des obstacles en deux ou trois zones contiguës de vitesses contraires.

Pression. — Voici le calcul de la pression le long de Γ. Pour plus de généralité, faisons ce calcul en supposant que l'équation en ζ qui définit le mouvement du fluide soit

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{e^{-w}} = 0.$$

Ensuite nous ferons $m = 1$. D'ailleurs $m = \frac{16}{g}$ en réalité.

Le long de la partie libre de la trajectoire Γ on a

$$4(\xi^2 + \eta^2) = 4\rho^2 = \frac{16}{V^2} = \frac{m}{e^{-\varphi}} \qquad [\textit{Voir}\ \S\ V];$$

d'où

$$V^2 = \frac{16}{m} e^{-\varphi} \qquad \text{et} \qquad V_0^2 = \frac{16}{m}(e^{-\varphi})_{\varphi=0} = \frac{16}{m},$$

V_0 étant la vitesse au point $x = 0$, $y = 0$; en ce point la pression est p_0.

L'équation de la pression est d'ailleurs

$$\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2}V^2 - gx = \frac{p_0}{\mu} + \frac{1}{2}V_0^2$$

(μ densité du liquide). Cette équation devient donc

$$\frac{p}{\mu} + \frac{16}{2m}e^{-\varphi} - gx = \frac{p_0}{\mu} + \frac{16}{2m}$$

ou, en remplaçant m par $\frac{16}{g}$,

$$\frac{p - p_0}{\mu} + \frac{1}{2}g(e^{-\varphi} - 1) - gx = 0$$

ou, en divisant par g et remplaçant x par sa valeur en fonction de φ, à savoir $2x = -\frac{1}{2}(e^{-\varphi} - e^{-\varphi_0}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{m}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi$,

$$\frac{p - p_0}{\mu g} = -\frac{3}{4}(e^{-\varphi} - e^{-\varphi_0}) + \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{m}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi.$$

Pour $m = 1$, c'est-à-dire pour $g = 16$, $\varphi_0 = 0$, on a

$$\frac{p - p_0}{4\mu} = -3(e^{-\varphi} - 1) + \sqrt{3}\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi.$$

On peut encore exprimer p en fonction de x et y, en éliminant φ; ce qui donne

$$\frac{p - p_0}{\mu g} = x - \frac{1}{2}(e^{-\varphi} - e^{-\varphi_0}) = x + \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3})$$

ou

$$\frac{p - p_0}{\mu g} = \frac{3x + y\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x\sqrt{3} + y).$$

Pour $m = 1$, c'est-à-dire $g = 16$, on a

$$\frac{p - p_0}{8\mu} = 3x + y\sqrt{3}.$$

La variation de p le long de la partie libre de la trajectoire Γ résulte des calculs précédents. On a, en effet,

$$\frac{1}{\mu g}\frac{dp}{d\varphi} = \frac{3}{4}e^{-\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{m}{e^{-\varphi}} - e^{-\varphi}}.$$

Cette formule montre que $\frac{dp}{d\varphi}$ est positif constamment lorsque φ croît de o à $+\infty$, c'est-à-dire tout le long de la trajectoire libre Γ. Pour $\varphi = +\infty$, on a d'ailleurs $p = +\infty$. On vérifie ces résultats en remarquant que la droite $\frac{3x + y\sqrt{3}}{2} = -\frac{p_0}{\mu g}$ (répondant à $p = 0$) ne coupe pas la partie libre de la trajectoire Γ.

Le long de la paroi on a

$$4(\xi^2 + \eta^2) = 4\rho^2 = \frac{16}{V^2} = (e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}})^2;$$

d'où

$$\frac{p - p_0}{\mu} + \frac{8}{(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}})^2} - 8 + 4\left[e^{-\varphi} - 1 - \int_0^{\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\,d\varphi\right] = 0;$$

or, pour $x = -\infty$, on a $V = 0$, d'où $p = -\infty$. Ainsi la pression diminue de p_0 à o à mesure qu'on s'avance sur la paroi du côté des x négatifs, puis la pression devient négative et se change en traction ou succion; mais de ce côté la rupture n'est pas facile à cause des parois qui tiennent les parties assemblées.

VIII.

Mouvement répondant à la bande $\varphi\varphi'$ CC'. — Étudions de même le mouvement du fluide répondant à la bande $\varphi\varphi'$CC' du plan w. Grâce aux considérations précédentes nous pourrons abréger beaucoup les explications de ce nouveau problème.

1° Pour la limite inférieure nous avons $\psi = 0$, d'où

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}$$

donne

$$2\zeta = -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}.$$

De là si $\varphi < 0$

$$2\xi = -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}},$$

$$2\eta = 0,$$

qui représentent $O\xi$ et doivent correspondre à une paroi verticale le long de laquelle la vitesse est parallèle à Ox et négative.

Si $\varphi > 0$, on a

$$2\xi = -e^{-\varphi},$$

$$2\eta = +\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}.$$

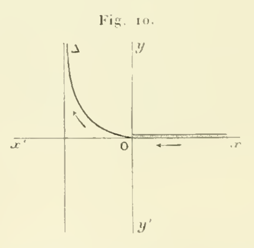
A cette limite de ζ répondra une *surface libre* du domaine de z, la pression le long de cette surface étant constante. On en tire

$$2x = e^{-\varphi} - 1,$$

$$2y = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi,$$

en faisant correspondre le point $x = 0$, $y = 0$ à $\varphi = 0$. Cette surface

Fig. 10.



libre et la paroi sont représentées *fig.* 10. L'équation différentielle de la surface libre est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - (2x+1)^3}{(2x+1)^3}}.$$

Pour $\varphi = +\infty$, on a $2x = -1$, $y = +\infty$, d'où l'asymptote $x = -\frac{1}{2}$.

La pression le long de cette surface libre est donnée par la formule

$$\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2}V^2 - gx = \frac{p_0}{\mu} + 8;$$

or

$$4(\xi^2 + \eta^2) = 4\rho^2 = \frac{16}{V^2} = \frac{1}{e^{-\varphi}};$$

d'où

$$V^2 = 16e^{-\varphi}$$

et ici $2x = e^{-\varphi} - 1$, d'où

$$\frac{p}{\mu} + 8e^{-\varphi} - 8(e^{-\varphi} - 1) = \frac{p_0}{\mu} + 8;$$

d'où $p = p_0$ tout le long de la partie courbe de cette trajectoire.

2° Pour la limite supérieure CC′ du domaine de w nous avons

$$2\xi + 2i\eta = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\right).$$

Pour $\varphi < 0$, nous en tirons

$$2\xi = \cos\frac{2\pi}{3}\left[-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\right],$$

$$2\eta = -\sin\frac{2\pi}{3}\left[-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\right],$$

qui correspondent à une paroi inclinée à 60° sur l'axe Ox; ξ et η pour $\varphi = -\infty$ sont infinis positifs. L'équation d'une parallèle menée à cette paroi par l'origine des coordonnées est

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tang} 60^\circ.$$

C'est la paroi déjà trouvée pour la trajectoire Γ mais transportée, comme nous allons voir, parallèlement à elle-même. Pour avoir l'intégrale $2z$ relative à cette paroi, il nous faut en effet former la somme suivante

$$\int_{w_0}^{w_1}\left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right)dw + \int_{w_1}^{w}\left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right)dw.$$

Un calcul que nous indiquerons en Note, à la fin de ce travail (*voir* Note II, p. 153), donne

$$\int_{w_0}^{w_1} \left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right) dw = -3,45 - i \times 1,9918.$$

On a donc, pour un point de cette paroi

$$2x = \cos\frac{2\pi}{3}\left[e^{-\varphi} - 1 - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\, d\varphi\right] - 3,45,$$

$$2y = -\sin\frac{2\pi}{3}\left[e^{-\varphi} - 1 - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}\, d\varphi\right] - 1,9918.$$

Elle se termine donc au point $2x_0 = -3,45$, $2y_0 = -1,9918$.

Pour $\varphi > 0$, on a

$$2\xi = -\cos\frac{2\pi}{3} e^{-\varphi} - \sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = \sin\frac{2\pi}{3} e^{-\varphi} - \cos\frac{2\pi}{3}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}$$

ou bien

$$2\xi = \frac{1}{2} e^{-\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}.$$

On voit que η est constamment positif tandis que ξ change de signe en s'annulant pour $\varphi = \frac{1}{3}\log\frac{4}{3} > 0$; positif pour $\varphi = 0$, ξ s'annule, devient négatif et est égal à $-\infty$ pour $\varphi = +\infty$. On en déduit

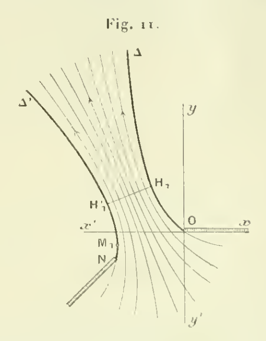
$$2x = -3,45 + \cos\frac{2\pi}{3}(e^{-\varphi} - 1) - \sin\frac{2\pi}{3}\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi,$$

$$2y = -1,9918 - \sin\frac{2\pi}{3}(e^{-\varphi} - 1) - \cos\frac{2\pi}{3}\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi.$$

De là la trajectoire Δ' représentée *fig.* 11 qui, avec la courbe Δ déjà construite, limite le fluide.

La trajectoire répondant à $\psi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ est rectiligne et est axe de symétrie de la veine liquide. On voit que c'est, en définitive, la figure

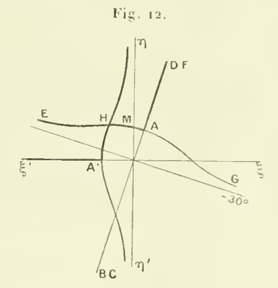
Fig. 11.



correspondant à la bande CC'DD' après rotation de 120° autour du point O.

C'est ce que faisait prévoir la construction du domaine ζ répondant à la bande $\varphi\varphi'$CC'. Ce domaine est représenté *fig.* 12 (trait fort). On

Fig. 12.



l'obtient facilement en assemblant la figure déjà construite pour $\psi = 120^\circ$ et la figure analogue qui répond à $\psi = 0$, et en tenant compte des signes trouvés pour ξ et η lorsque $\varphi = \pm\infty$. Aux points A et A' répondent les points O et N de la figure précédente, points où se terminent les parois; au point H répondent les points H_1, H'_1 où les

tangentes sont parallèles et inclinées à 120° sur l'axe des x; enfin au point M, où la branche AE perce l'axe des ξ, répond le point M_1 de la trajectoire Δ', où la tangente est parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire horizontale; à cause de la symétrie générale, H_1 et H'_1 sont symétriques par rapport à l'axe de la veine et $H_1H'_1$ constitue la section contractée.

Le long de Δ' on a $4(\xi^2+\eta^2) = \frac{1}{e^{-\varphi}}$, d'où $V^2 = 16e^{-\varphi}$. La pression le long de Δ' n'est pas constante comme le long de Δ; elle est donnée par l'équation

$$\frac{p}{\mu} + 12e^{-\varphi} + 4\sqrt{3}\int_0^{\varphi}\sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi = \frac{p_0}{\mu} - 15,6.$$

Pour $\varphi = +\infty$, $p = -\infty$; la pression à une certaine distance de N se change donc en traction.

Mouvement répondant à la bande DD'EE'. — Il est clair que le mouvement du fluide répondant à la bande DD'EE' s'obtiendra de la même manière et donnera une figure analogue où y sera changé en $-y$.

Coefficient de contraction de la veine. — Le coefficient de contraction, dans le premier exemple que nous venons d'étudier, est

$$\frac{H_1H'_1}{ON} = c = 0,92.$$

Il en est de même dans les deux autres cas. D'après le calcul de la Note III (p. 156), ce coefficient de contraction est indépendant de l'intensité g de la force constante qui agit sur le liquide; dans le cas de $g = 9,808$ on a donc encore $c = 0,92$; la forme de la veine fluide reste la même, quel que soit g; on doit seulement en multiplier toutes les dimensions par $\sqrt[3]{m}$ ou $\sqrt[3]{\frac{16}{g}}$.

NOTE I.

CALCUL DE ω ET DE ϖ.

Nous allons d'abord calculer

$$Z = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi, \qquad \text{où} \qquad \varphi_1 = \frac{1}{3}\log 4.$$

Posons

$$e^{-\varphi} = u,$$

d'où

$$\varphi = -\log u, \qquad d\varphi = -\frac{du}{u}, \qquad \varphi > 0, \qquad \text{donc} \qquad u < 1.$$

Il vient

$$-Z = \int_1^{u_1} \sqrt{\frac{1}{u} - u^2}\,\frac{du}{u} = \int_1^{u_1} \frac{\sqrt{1-u^3}}{\sqrt{u^3}}\, du.$$

Développons $\sqrt{1-u^3}$ (module $u < 1$) en série. On a

$$(1-u^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - C_1 u^3 - \ldots - C_n u^{3n} - \ldots,$$

où

$$C_q = -\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{1}\right)\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{q}\right) > 0;$$

on aura donc

$$\frac{(1-u^3)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} = u^{-\frac{3}{2}} - C_1 u^{3-\frac{3}{2}} - \ldots - C_n u^{3n-\frac{3}{2}} - \ldots,$$

d'où

$$F(u) = \int \frac{(1-u^3)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{2}{3}}}\, du = C + \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \ldots - C_n \frac{u^{3n-\frac{3}{2}+1}}{3n-\frac{3}{2}+1} - \ldots.$$

Pour $\varphi = \frac{1}{3}\log 4 = \log 4^{\frac{1}{3}}$, on a

$$u = u_1 = 4^{-\frac{1}{3}},$$

d'où

$$F(u_1) = C - 4^{\frac{1}{6}} D,$$

en posant

$$D = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + C_1 \frac{4^{-1}}{3 - \frac{1}{2}} + \ldots + C_n \frac{4^{-n}}{3n - \frac{1}{2}} + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$F(1) = C + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \ldots - C_n \frac{1}{3n - \frac{1}{2}} = C - E,$$

en posant

$$E = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{C_1}{3 - \frac{1}{2}} + \ldots + \frac{C_n}{3n - \frac{1}{2}} + \ldots.$$

On aura donc

$$(1) \qquad -Z = \int_1^{u_1} = F(u_1) - F(1) = C - 4^{\frac{1}{6}} D - C + E = E - 4^{\frac{1}{6}} D.$$

d'où

$$Z = \frac{4^{\frac{1}{6}} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{C_1}{3 - \frac{1}{2}} \left(4^{-1+\frac{1}{6}} - 1\right) + \ldots + C_n \frac{4^{-n+\frac{1}{6}} - 1}{3n - \frac{1}{2}} + \ldots.$$

Nous utiliserons la formule (1) en calculant d'abord D, puis E.

Calcul de D. — Un calcul simple donne pour les coefficients C_q

$$C_1 = \frac{1}{2}, \qquad C_2 = \frac{1}{2^3}, \qquad C_3 = \frac{1}{2^4}, \qquad C_4 = \frac{5}{2^7}, \qquad C_5 = \frac{7}{2^8},$$

$$C_6 = \frac{21}{2^{10}} \qquad C_7 = \frac{33}{2^{11}}, \qquad C_8 = \frac{33 \times 13}{2^{15}}, \qquad \ldots;$$

on a donc

$$D = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} \frac{1}{4^2} \frac{1}{6 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^4} \frac{1}{4^3} \frac{1}{9 - \frac{1}{2}} + \ldots,$$

ou

$$D = 2 + \frac{1}{20} + \frac{1}{2^3 \cdot 4^2} \times \frac{2}{11} + \frac{2}{2^4 \cdot 4^3 \cdot 17} + \ldots,$$

ou

$$D = 2 + 0,05 + 0,0015 + R = 2,0515 + R.$$

Je dis que l'on a

$$R < 0,001.$$

En effet,

$$R_q^{\text{D}} = \frac{C_q}{4^q\left(3q - \frac{1}{2}\right)} + \ldots < \frac{C_q}{3q - \frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^{q+1}} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{C_q}{3q - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{4^q} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}},$$

ou

$$R_q^{\text{D}} < \frac{8C_q}{(6q-1)4^q \times 3}.$$

Pour $q = 4$, on a donc

$$R < \frac{8C_4}{23 \cdot 4^4 \cdot 3} \quad \text{ou} \quad \frac{8 \cdot 5}{2^7 \cdot 23 \cdot 2^8 \cdot 3} \quad \text{ou} \quad \frac{10}{2^{13} \cdot 23 \cdot 3} < \frac{1}{10^4}.$$

comme on le voit en prenant les logarithmes des deux membres. On a donc

$$D = 2,052,$$

à moins de $\frac{1}{1000}$ près.

Calcul de E. — On a

$$E = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{6 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{9 - \frac{1}{2}} + \frac{5}{2^7} \times \frac{1}{12 - \frac{1}{2}} + R.$$

ou

$$E = 2 + 0,2 + 0,022727$$
$$+ 0,00735 + 0,00067 + R' = 2,230747 + R'.$$

Calculons une limite supérieure de R′. On a, en général,

$$R' = R_5^E = \frac{C_5}{3.5-\frac{1}{2}} + \frac{C_6}{3.6-\frac{1}{2}} + \ldots < \frac{1}{3.5-\frac{1}{2}}[C_5 + C_6 + \ldots],$$

ou

$$\frac{2}{29}(1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4);$$

car, si dans le développement de $(1-u^3)^{\frac{1}{2}}$ nous faisons $u=1$, il vient

$$0 = 1 - C_1 - C_2 - \ldots - C_n - \ldots,$$

d'où

$$C_5 + C_6 + \ldots = 1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4.$$

On a donc

$$R < \frac{2}{29}\left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}\right)\right]$$

ou

$$\frac{2 \times 0,2734}{29} < 0,018.$$

On a donc

$$E = 2,245,$$

à moins de $\frac{2}{10^2}$ près et probablement à moins de $\frac{1}{10^2}$ près.

Calcul de Z. — On a encore à calculer $4^{\frac{1}{6}}$, ce qui donne 1,26 (par excès). On a donc enfin

$$4^{\frac{1}{6}}D = 2,5830,$$

et

$$Z = 2,5830 - 2,245 = 0,338.$$

$$Z = 0,338.$$

Calcul de ω et de ϖ. — On a

$$\begin{cases} 2\omega = (e^{-\varphi_1} - 1)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}Z, \\ 2\varpi = (e^{-\varphi_1} - 1)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}Z, \end{cases}$$

où

$$e^{-\varphi_1} = 4^{-\frac{1}{3}} = 0,63,$$

d'où

$$e^{-\varphi_1} + 1 = 0,37;$$

on a donc

$$\begin{cases} 2\omega = 0,47770, \\ 2\varpi = 0,1514, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \omega = 0,23885, \\ \varpi = 0,0757. \end{cases}$$

Coefficient de contraction. — C'est le rapport de la section contractée à l'orifice, c'est-à-dire

$$\frac{H_1 H'_1}{ON} = \frac{ON - 2\varpi}{ON} = 1 - \frac{2\varpi}{ON} = c.$$

Or (*voir* Note II)

$$ON = \frac{3,982}{2} = 1,991,$$

d'où

$$c = \frac{1,991 - 0,151}{1,991} = \frac{1,84}{1,99} = 0,92.$$

NOTE II.

CALCUL DE $\int_{w_1}^{w_2} \left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right) dw$, ET $\int_{w_0}^{w_1} \left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\right) dw$.

A. Calculons d'abord

$$I_p^q = \int_p^q \sqrt{e^{-2w} - e^{w}}\, dw.$$

En faisant le changement de variable $e^{-w} = u$, il vient

$$I_p^q = -\int_{p'}^{q'} \sqrt{1 - \frac{1}{u^3}}\, du, \qquad p' = e^{-p}, \qquad q' = e^{-q}.$$

Or

$$\left(1-\frac{1}{u^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{\frac{3}{2}}{1}-1\right)u^{-3}-\ldots-C_n u^{-3n}-\ldots,$$

d'où

$$\int\left(1-\frac{1}{u^3}\right)^{\frac{1}{2}}du = \text{const.}$$
$$+u-\left(\frac{\frac{3}{2}}{1}-1\right)\frac{u^{-3+1}}{-3+1}-\ldots-C_n\frac{u^{-3n+1}}{-3n+1}-\ldots,$$

d'où

$$-I_p^q = (q'-p')+\left(\frac{\frac{3}{2}}{1}-1\right)\frac{q'^{-3+1}-p'^{-3+1}}{3-1}+\ldots$$
$$+\frac{C_n}{3n-1}(q'^{-3n+1}-p'^{-3n+1})+\ldots.$$

Cela posé :

$I_{w_1}^{w_2}=(\alpha-\beta)P$. — 1° Supposons d'abord $p=w_1$ et $q=w_2$, d'où

$$q'=\beta=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad p'=\alpha=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Il viendra

$$-I_{w_1}^{w_2}=\beta-\alpha+\frac{\frac{3}{2}-1}{3-1}(\beta-\alpha)+\ldots+\frac{C_n}{3n-1}(\beta-\alpha)+\ldots.$$

car

$$\beta^{-3n}=\alpha^{-3n}=1,$$

α et β étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. D'où

$$I_{w_1}^{w_2}=(\alpha-\beta)P,$$

en posant

$$P=1+\frac{\frac{3}{2}-1}{3-1}+\ldots+\frac{C_n}{3n-1}+\ldots.$$

Calculons une valeur approchée de P. D'après les valeurs déjà

calculées des coefficients C_q, on a

$$P = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{5} + \frac{1}{2^4}\frac{1}{8} + \frac{5}{2^7}\frac{1}{10} + R_1,$$

où

$$R_1 = \frac{C_5}{3.5-1} + \ldots + \frac{C_n}{3n-1} + \ldots \leq (C_5 + C_6 + \ldots + C_n + \ldots)\frac{1}{14}.$$

Or nous savons que l'on a

$$0 = 1 - C_1 - C_2 - \ldots - C_n - \ldots;$$

d'où

$$C_5 + C_6 + \ldots + C_n + \ldots = 1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4;$$

d'où

$$R_1 \leq \frac{1}{14}[1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{14} \times 0,27344;$$

d'où

$$R_1 \leq 0,019.$$

On a donc

$$P = 1 + 0,25 + 0,025 + 0,00781 + 0,0035 + 0,015 \text{ environ} = 1,3.$$

Ainsi

$$P = 1,3.$$

On en déduit

$$I_{w_1}^{w_2} = (\alpha - \beta)\,1,3 = -i\sqrt{3} \times 1,3 = -i \times 2,25.$$

$I_{w_0}^{w_1} = (1-\alpha)P$. — 2° Supposons ensuite

$$q = w_1, \qquad p = w_0,$$

d'où

$$q' = \alpha, \qquad p' = 1.$$

On aura

$$-I_{w_0}^{w_1} = (\alpha - 1) + \frac{\frac{3}{2} - 1}{1}\frac{\alpha - 1}{3 - 1} + \ldots + \frac{Cn}{3n-1}(\alpha - 1) + \ldots,$$

car $\alpha^{-3n} = 1$, comme nous l'avons déjà remarqué. On a donc

$$I_{w_0}^{w_1} = (1-\alpha)\left[1 + .. + \frac{Cn}{3n-1} + \ldots\right] = (1-\alpha)P,$$

$$I_{w_0}^{w_1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \times 1,3.$$

B. Ceci posé, on a d'ailleurs

$$\int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}})\,dw = (e^{-w})_{w_1}^{w_2} - I_{w_1}^{w_2};$$

or

$$(e^{-w})_{w_1}^{w_2} = \beta - \alpha, \qquad I_{w_1}^{w_2} = (\alpha - \beta)P.$$

On a donc

$$\int_{w_1}^{w_2} = (\beta - \alpha) - (\alpha - \beta)P = (\beta - \alpha)(P + 1) = i\sqrt{3} \times 2,3$$
$$= i \times 3,982.$$

On a, de même,

$$\int_{w_0}^{w_1} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w}})\,dw = (e^{-w})_{w_0}^{w_1} - I_{w_0}^{w_1}.$$

Or

$$(e^{-w})_{w_0}^{w_1} = \alpha - 1, \qquad I_{w_0}^{w_1} = (1-\alpha)P;$$

d'où

$$\int_{w_0}^{w_1} = (\alpha - 1) - (1 - \alpha)P = (\alpha - 1)(P + 1)$$
$$= -\frac{3+i\sqrt{3}}{2} \times 2,3 = -3,45 - i \times 1,9918.$$

NOTE III.

Généralisation des calculs des notes I et II.

Considérons l'équation

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{e^{-w}} = 0$$

plus générale que celle étudiée précédemment et qui s'y réduit pour $m = 1$. D'ailleurs $m = \frac{16}{g}$. Nous avons déjà fait cette généralisation dans le calcul de la pression (p. 141). Calculons dans la nouvelle hypothèse les quantités ω, ϖ, $\int_{w_1}^{w_2}$, $\int_{w_0}^{w_1}$.

On a

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - me^{w}}.$$

Les racines du radical sont celles de l'équation $e^{-3w} = m$, c'est-à-dire qu'on tire de là pour e^{-w} ou u les racines du cas de $m = 1$ multipliées par $\sqrt[3]{m}$.

Posons

$$e^{-w} = u = v\sqrt[3]{m}, \qquad \mathrm{T} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{me^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi.$$

Ce radical deviendra

$$\mathrm{T} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{me^{\varphi} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi = -\int_{\sqrt[3]{m}}^{\sqrt[3]{\frac{m}{4}}} \sqrt{\frac{m}{u} - u^2}\, \frac{du}{u}$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}^{1} \sqrt{\frac{m - mv^3}{mv^3}}\, \sqrt[3]{m}\, dv = \mathrm{Z} \times \sqrt[3]{m} = 0,338 \times \sqrt[3]{m}.$$

On aura donc, dans notre nouvelle hypothèse,

$$\begin{cases} 2\omega_1 = (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_0})\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{T} = \left(\sqrt[3]{\frac{m}{4}} - \sqrt[3]{m}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{T}, \\ 2\varpi_1 = -(e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_0})\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{m}{4}} - \sqrt[3]{m}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{T}, \end{cases}$$

ω_1 et ϖ_1 désignant les nouvelles valeurs de ω et de ϖ. On a bien

$$\begin{cases} 2\omega_1 = 2\omega \times \sqrt[3]{m}, \\ 2\varpi_1 = 2\varpi \times \sqrt[3]{m}. \end{cases}$$

Le calcul de $\int_{w_1}^{w_2}$ ou de $\int_{w_0}^{w_1}$ conduit à des résultats analogues.

On a

$$J_p^q = -\int_{\alpha\sqrt[3]{m}}^{\beta\sqrt[3]{m}} \sqrt{1 - \frac{m}{u^3}}\, du = -\int_\alpha^\beta \sqrt{1 - \frac{1}{v^3}}\sqrt[3]{m}\, dv = \sqrt[3]{m} \times I_p^q.$$

On voit donc que toutes les dimensions de la nouvelle veine liquide se déduiront de celle étudiée dans ce Mémoire après multiplication des dimensions par $\sqrt[3]{m}$, où $m = \frac{16}{g}$.

En particulier, le coefficient de contraction étant un rapport de deux de ces dimensions sera le même que pour $m = 1$. Ce qui justifie ce que nous disons page 148.

NOTE IV.

Nous avons trouvé pour les équations de la trajectoire Γ en fonction du paramètre arbitraire φ les équations suivantes

$$\begin{cases} 2x = \quad (e^{-\varphi} - 1)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{e^\varphi - e^{-2\varphi}}\, d\varphi. \\ 2y = -(e^{-\varphi} - 1)\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3}\int_0^\varphi \sqrt{e^\varphi - e^{-2\varphi}}\, d\varphi. \end{cases}$$

Nous avions d'ailleurs

$$\begin{cases} 2\xi = 2\frac{dx}{d\varphi} = \frac{e^{-\varphi}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{e^\varphi - e^{-2\varphi}}, \\ 2\eta = 2\frac{dy}{d\varphi} = e^{-\varphi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{e^\varphi - e^{-2\varphi}}. \end{cases}$$

Combinons les équations qui donnent $2x$ et $2y$ de façon à éliminer

$$\int_0^\varphi \sqrt{e^\varphi - e^{-2\varphi}}\, d\varphi$$

entre elles deux. Nous aurons

$$2x\cos\frac{2\pi}{3} - 2y\sin\frac{2\pi}{3} = e^{-\varphi} - 1$$

ou

$$e^{-\varphi} = 1 - x - y\sqrt{3} = X.$$

Éliminons $e^{-\varphi}$ entre cette dernière équation et les valeurs écrites plus haut de $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ et divisons ces dernières l'une par l'autre pour éliminer $d\varphi$; il viendra

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{X\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{X} - X^2}}{X + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{X} - X^2}};$$

telle est la relation entre x, y, dx, dy.

On peut la ramener aux quadratures. Pour cela il suffit de prendre X pour fonction à la place de y.

On en déduit, en effet,

$$dX = -dx - \sqrt{3}\,dy$$

ou

$$dy = -\frac{dx + dX}{\sqrt{3}};$$

d'où, en posant

$$f(X) = \frac{X\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{X} - X^2}}{X\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{X} - X^2}},$$

l'équation différentielle (1) devient

$$(2) \qquad \frac{dx}{dX} = \frac{1}{\sqrt{3}f(X) - 1};$$

d'où

$$(3) \qquad x = \int \frac{dX}{\sqrt{3}f(X) - 1} + \text{const.}$$

On voit ainsi que, par une quadrature, on aura la relation qui lie x et y.

Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques;

PAR M. H. POINCARÉ.

I. — Introduction.

Les propriétés arithmétiques de certaines expressions et, en particulier, celles des formes quadratiques binaires, se rattachent de la façon la plus étroite à la transformation de ces formes par des substitutions linéaires à coefficients entiers. Je n'ai pas à insister ici sur le parti qui a été tiré de l'étude de ces substitutions et qui est assez connu de tous ceux qui s'intéressent à l'Arithmétique.

On peut supposer que l'étude de groupes de transformations analogues est appelée à rendre de grands services à l'Arithmétique. C'est ce qui m'engage à publier les considérations suivantes, bien qu'elles constituent plutôt un programme d'étude qu'une véritable théorie.

Je me suis demandé si beaucoup de problèmes d'Analyse indéterminée ne pourraient pas être rattachés les uns aux autres par un lien systématique, grâce à une classification nouvelle des polynomes homogènes d'ordre supérieur de trois variables, analogue à certains égards à la classification des formes quadratiques.

Cette classification aurait pour base le groupe des transformations birationnelles *à coefficients rationnels* que peut subir une courbe algébrique.

II. — Courbes unicursales.

Soit $f(x, y, z)$ un polynome homogène en x, y, z, à coefficients entiers. On pourra regarder l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

comme représentant une courbe algébrique plane en coordonnées homogènes. Deux courbes $f = 0$ et $f_1 = 0$ seront alors regardées comme *équivalentes* ou appartenant à la même *classe*, si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, *à coefficients entiers ou rationnels.*

J'observe d'abord que deux droites

$$ax + by + cz = 0, \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

(où les coefficients des premiers membres sont, bien entendu, entiers ou rationnels) sont toujours équivalentes. Il suffit, en effet, de faire correspondre au point M de la première droite le point M_1 de la seconde droite, de telle façon que la droite MM_1 aille passer par un point donné fixe F *à coordonnées rationnelles.* Il n'y a donc qu'une seule classe de droites.

Considérons maintenant les coniques.

Soit donc $f = 0$ l'équation d'une conique. Si cette conique passe par un point C à coordonnées rationnelles (c'est ce que j'appellerai pour abréger un *point rationnel*), elle est équivalente à une droite. Il suffit, en effet, de considérer une droite quelconque D à coefficients rationnels (ce que j'appellerai une *droite rationnelle*) et de faire correspondre à un point M de la conique, un point M_1 de la droite D tel que les trois points MM_1C soient en ligne droite.

Il résulte immédiatement de là que, si une conique admet un point rationnel, elle en admet une infinité. On peut le voir aussi comme il suit. Soit C un point rationnel de la conique, soit P un point rationnel *quelconque* du plan. Joignons PC, cette droite coupera la conique en un second point M qui sera évidemment rationnel.

Les coniques qui admettent un point rationnel forment donc une seule classe, et cette classe comprend également toutes les droites. Reconnaître si une conique admet un point rationnel, c'est un problème que Gauss nous a enseigné à résoudre, dans son Chapitre des *Disquisitiones*, intitulé *Representatio ciffræ*.

Les coniques qui n'ont pas de point rationnel se répartissent en plusieurs classes et les conditions de cette répartition se déduisent immédiatement des principes de ce même Chapitre de Gauss.

Considérons maintenant une cubique unicursale (à coefficients rationnels), cette cubique a un point double qui, étant unique, est forcément rationnel. Soit C ce point double, je dis que notre cubique est équivalente à une droite. En effet, soit D une droite rationnelle quelconque, nous pouvons faire correspondre au point M de la cubique un point M_1 de la droite D, de telle façon que la droite MM_1 passe en C.

Les mêmes principes sont applicables à une courbe unicursale quelconque. Soit $f = 0$ une courbe unicursale rationnelle de degré m; elle aura $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. Par ces

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points doubles, je puis faire passer ∞^{m-2} courbes de degré $m-2$. Comme nos $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles sont les seuls points doubles d'une courbe à coefficients rationnels, toute fonction symétrique de leurs coordonnées sera rationnelle.

D'où il suit que je pourrai faire passer par ces points doubles et par $m-2$ points rationnels pris à volonté dans le plan une courbe de degré $m-2$, et une seule, et que *cette courbe sera rationnelle* (je veux dire à coefficients rationnels).

L'équation générale des courbes de degré $m-2$ passant par les points doubles sera donc de la forme suivante

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \varphi_{m-1} = 0,$$

les α étant des coefficients arbitraires et les φ étant des polynomes en-

tiers homogènes d'ordre $m-2$ en x, y, z, à coefficients rationnels.

Posons

$$(1)\qquad \frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\ldots=\frac{\xi_{m-1}}{\varphi_{m-1}}.$$

Si nous regardons les ξ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $m-2$ dimensions, les équations (1) définissent une transformation qui change la courbe unicursale plane $f=0$ en une certaine courbe de cet espace à $m-2$ dimensions; cette courbe, je l'appelle K.

J'observe d'abord que cette courbe est de degré $m-2$. En effet, soit

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\ldots+\alpha_{m-1}\xi_{m-1}=0$$

l'équation d'un plan quelconque de l'espace à $m-2$ dimensions; pour avoir les points d'intersection de ce plan avec K, je n'ai qu'à chercher ceux de $f=0$ avec la courbe

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_{m-1}\varphi_{m-1}=0.$$

Cette courbe étant de degré $m-2$, le nombre total des points d'intersection est $m(m-2)$, dont $(m-1)(m-2)$ sont confondus avec les points doubles et dont $m-2$ seulement sont mobiles.

Le nombre des points d'intersection du plan et de K est donc $m-2$.

C. Q. F. D.

Je remarque ensuite que la transformation (1) est birationnelle; en effet, d'abord l'on a directement les rapports des ξ en fonctions rationnelles de x, y, z à coefficients rationnels. Je cherche maintenant à exprimer inversement les rapports des trois coordonnées x, y, z en fonctions des ξ.

Pour avoir $\frac{x}{z}$ par exemple, je prends deux quelconques des équations (1), par exemple,

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1}=\frac{\xi_2}{\varphi_2}=\frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

et entre l'équation $f = 0$ et ces deux équations j'élimine $\frac{y}{z}$; il restera deux équations

(2) $$F = 0, \qquad F_1 = 0,$$

dont les premiers membres seront homogènes en x, z d'une part, en ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'autre part. Entre ces deux équations, éliminons maintenant $\frac{x}{z}$ par la méthode du plus grand commun diviseur. Nos divisions successives nous conduiront à une série d'équations :

$$F_2 = 0, \qquad F_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_p = 0,$$

dont les premiers membres seront des polynomes homogènes en x, z d'une part, en ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'autre part, et *à coefficients rationnels*. Mais dans cette série, le degré des polynomes successifs en x et z ira en décroissant. La dernière équation $F_p = 0$ ne contiendra plus x et z; elle exprimera la condition pour que les deux équations (2) aient une racine commune.

C'est donc l'équation de la projection de la courbe K sur le plan à 2 dimensions

$$\xi_4 = \xi_5 = \ldots = \xi_{m-1} = 0.$$

L'équation précédente $F_{p-1} = 0$ est homogène du premier degré en x et en z. On en tirera donc le rapport $\frac{x}{z}$ en fonction rationnelle de ξ_1, ξ_2, ξ_3 à coefficients rationnels, à moins que $F_{p-1} = 0$ ne se réduise à une identité, soit par elle-même, soit en vertu de $F_p = 0$. Mais si cette dernière circonstance se présentait, cela voudrait dire que les équations

$$f = 0, \qquad \frac{\xi_1}{\varphi_1} = \frac{\xi_2}{\varphi_2} = \frac{\xi_3}{\varphi_3}$$

ont deux solutions communes toutes les fois qu'elles en ont une. Or la théorie *algébrique* des courbes unicursales, sur laquelle je n'ai pas à revenir, nous apprend qu'il n'en est pas ainsi. Nous n'avons donc pas à nous occuper de cette exception qui ne se présentera pas.

La conclusion est que la transformation (1) est une transformation birationnelle à coefficients rationnels (je dirai pour abréger une *transformation purement rationnelle*) et même qu'il en est de même de la transformation

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1} = \frac{\xi_2}{\varphi_2} = \frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

qui transforme la courbe plane $f = 0$ en la courbe plane $F_p = 0$.

La courbe unicursale plane $F_p = 0$, étant la projection de K, est de degré $m - 2$, d'où cette conséquence :

Une courbe unicursale rationnelle est toujours équivalente à une autre courbe unicursale dont le degré est de deux unités plus petit.

De proche en proche, on arrive au résultat suivant :

Une courbe unicursale rationnelle est toujours équivalente à une droite ou à une conique.

Sur une droite ou sur une conique rationnelles, il y a une infinité de couples de points, tels que toutes fonctions symétriques de leurs coordonnées soient rationnelles (c'est ce que j'appellerai des *couples rationnels*); ces couples rationnels s'obtiennent sur une conique en coupant cette conique par une droite rationnelle quelconque.

Donc, *sur une courbe unicursale rationnelle quelconque, il y a toujours une infinité de couples rationnels.*

Sur une droite rationnelle, il y a toujours une infinité de points rationnels.

Donc, *sur une courbe unicursale rationnelle quelconque de degré impair, il y a une infinité de points rationnels.*

Ces résultats peuvent encore s'obtenir d'une autre manière.

J'appellerai *groupe rationnel* un groupe de points tels que toute fonction symétrique de leurs coordonnées soit rationnelle.

Je dis d'abord que, sur la courbe $f = 0$, il y a une infinité de groupes rationnels de $m - 2$ points. On les obtient de la façon suivante :

Considérons la courbe de degré $m - 2$

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \varphi_{m-1} = 0,$$

et donnons aux coefficients arbitraires α des valeurs rationnelles.

Cette courbe coupera $f=0$ en $m-2$ points, outre les points doubles, et ces $m-2$ points formeront évidemment un groupe rationnel.

Je dis maintenant qu'il y a une infinité de couples rationnels.

En effet, par les points doubles, je puis faire passer $\infty^{2(m-1)}$ courbes de degré $m-1$. Prenons ensuite deux groupes rationnels de $m-2$ points; par les points doubles et par ces deux groupes, je pourrai faire passer ∞^2 courbes de degré $m-1$ dont l'équation générale pourra s'écrire

$$(3) \qquad \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3 = 0,$$

où les α sont des coefficients arbitraires et les ψ des polynomes homogènes de degré $m-1$ en x, y, z, *à coefficients rationnels*.

Donnons aux arbitraires α des valeurs rationnelles quelconques; la courbe (3) coupera la courbe $f=0$:

1° Aux points doubles, ce qui compte pour $(m-1)(m-2)$ intersections;

2° Aux points des deux groupes rationnels, ce qui fait $2(m-2)$ intersections;

3° En deux autres points mobiles.

Ces deux points mobiles formeront évidemment un couple rationnel.

C. Q. F. D.

Considérons la transformation

$$\frac{\xi_1}{\psi_1} = \frac{\xi_2}{\psi_2} = \frac{\xi_3}{\psi_3},$$

on verrait, comme pour la transformation (1), qu'elle est purement rationnelle; et elle transforme $f=0$ en une conique, puisque les courbes (3) coupent $f=0$ en deux points mobiles.

Toute courbe unicursale est donc équivalente à une conique.

Supposons enfin m impair, je dis qu'il y aura une infinité de points rationnels.

Considérons, en effet, $\frac{m-3}{2}$ couples rationnels quelconques, par ces couples et par les points doubles je puis faire passer un faisceau

de courbes de degré $m-2$ ayant pour équation générale

$$(4) \qquad \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 = 0,$$

les α étant arbitraires et les θ ayant leurs coefficients rationnels.

Donnons aux α des valeurs rationnelles quelconques. La courbe (4) coupera $f=0$, non seulement aux points doubles et aux $m-3$ points de nos couples rationnels, mais encore en un autre point qui, étant unique, devra être rationnel. C. Q. F. D.

III. — Points rationnels des cubiques.

On voit avec quelle facilité se traite le cas des courbes unicursales. Passons maintenant aux courbes de genre 1 et d'abord aux plus simples d'entre elles, je veux dire aux cubiques.

Étudions d'abord la distribution des points rationnels sur ces courbes.

J'observe que la connaissance de deux points rationnels sur une cubique rationnelle suffit pour en faire connaître un troisième. En effet, la droite qui joint deux points rationnels donnés va couper la cubique en un troisième point qui, étant unique, sera encore rationnel.

De même, si nous connaissons un point rationnel, nous pouvons en déduire un second. Pour cela, considérons la tangente à la cubique en un point rationnel. Ce sera une droite rationnelle, et elle coupera la cubique en un autre point qui sera rationnel.

Voyons quels sont les points rationnels que l'on peut déduire ainsi de la connaissance de un, deux, trois, etc., points rationnels donnés.

A chaque point d'une courbe de genre 1 est attaché un *argument elliptique* et de telle façon que, sur une cubique, la somme des arguments elliptiques de trois points en ligne droite soit constante à une période près. Nous définirons l'argument de telle façon que cette constante soit nulle. Nous devons remarquer que l'argument n'est défini de la sorte qu'à $\frac{1}{3}$ de période près. Car, si l'on ajoute à tous les arguments $\frac{1}{3}$ de période la somme des arguments de trois points en ligne droite ne cessera pas d'être égale à une période.

Cela posé, soit M_0 un point rationnel dont l'argument elliptique soit α.

La tangente en M_0 ira couper la cubique en un point rationnel M_{-1} dont l'argument elliptique sera -2α. La tangente en M_{-1} ira couper la cubique en un point rationnel M_1 dont l'argument elliptique sera 4α.

La droite $M_1 M_0$ ira couper la cubique en un point rationnel M_{-2}, dont l'argument sera -5α; la droite $M_{-2}M_{-1}$ ira couper la cubique en un point rationnel M_2 d'argument 7α.

La droite $M_2 M_0$ coupera la cubique en un point M_{-3} d'argument -8α et la droite $M_{-3}M_{-1}$ la coupera en un point M_3 d'argument 10α.

La loi est manifeste et il existera sur la cubique une série de points rationnels M_n (n étant un indice entier variant de $-\infty$ à $+\infty$) et l'argument elliptique de M_n est $(3n+1)\alpha$.

Ces points sont tous distincts, à moins que α ne soit commensurable avec une période.

La droite qui joint deux de ces points M_n et M_p passe par un troisième point rationnel dont l'argument elliptique est

$$[3(-n-p-1)+1]\alpha,$$

et qui fait, par conséquent, encore partie de la série des points M_n.

Soient maintenant M_0 et N_0 deux points rationnels d'arguments α et β; les points M_n et N_p d'arguments

$$(3n+1)\alpha \quad \text{et} \quad (3p+1)\beta$$

seront encore rationnels; le troisième point d'intersection de la cubique avec la droite $M_n N_p$ aura pour argument

$$-(3n+1)\alpha-(3p+1)\beta$$

et sera rationnel. Les deux points

$$\beta \quad \text{et} \quad -(3n+1)\alpha-(3p+1)\beta$$

étant rationnels, il en sera de même de

$$(3n+1)\alpha+3p\beta.$$

Et, de même, le point

$$3n\alpha + (3p+1)\beta$$

devra être rationnel.

En résumé, seront rationnels tous les points d'argument

$$a\alpha + b\beta,$$

où a et b sont des entiers satisfaisant à l'un des trois systèmes de congruences :

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv 1, & b \equiv 0 \\ a \equiv 0, & b \equiv 1 \\ a \equiv -1, & b \equiv -1 \end{array}\right\} \pmod 3;$$

en d'autres termes, tous les points d'argument

$$\alpha + 3n\alpha + p(\beta - \alpha),$$

n et p étant des entiers.

Observons que si l'on joint deux de ces points, la droite rationnelle ainsi obtenue coupera la cubique en un troisième point dont l'argument sera encore de même forme.

Cela montre que *tous* les points rationnels que l'on peut déduire de M_0 et N_0 sont compris dans cette même formule.

Plus généralement, si les points d'arguments elliptiques

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q$$

sont rationnels, il en sera de même de tous les points dont les arguments elliptiques sont compris dans la formule

$$(1) \qquad \alpha + 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha)$$

où n et les p sont entiers.

Tous les points compris dans la formule (1) sont-ils distincts? Ils le seront à moins qu'il n'y ait, entre les arguments

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q$$

et une période, une relation linéaire à coefficients entiers.

On peut se proposer de choisir les arguments

$$(2) \qquad \alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q,$$

de telle façon que la formule (1) comprenne tous les points rationnels de la cubique. Les $q+1$ points rationnels qui ont les arguments (2) formeront alors ce que nous appellerons un *système de points rationnels fondamentaux*.

Il est clair que l'on peut choisir d'une infinité de manières le système des points rationnels fondamentaux. On devra tout d'abord dans ce choix s'arranger de telle façon que le nombre $q+1$ des points fondamentaux soit aussi petit que possible. Cette valeur minima de ce nombre $q+1$ sera ce que j'appellerai le *rang* de la cubique; c'est évidemment un élément très important de la classification des cubiques rationnelles.

Il y en a d'autres.

On sait que les cubiques réelles se partagent en deux catégories : les unes ont une seule branche où tous les arguments elliptiques sont réels; les autres ont deux branches; tous les points de la première branche (branche impaire) ont leurs arguments réels, tous ceux de la seconde branche (branche paire) ont leurs arguments égaux à une quantité réelle augmentée d'une demi-période imaginaire que j'appellerai $\frac{\omega'}{2}$.

Dans le premier cas, tous les points rationnels ont leur argument réel, de sorte que les quantités $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont toutes réelles.

Dans le second cas, il peut encore arriver que toutes ces quantités soient réelles et il arrive alors que tous les points rationnels sont sur la branche impaire et qu'il n'y en a pas sur la branche paire.

Mais il peut arriver également que l'une des quantités α soit égale à une quantité réelle augmentée de $\frac{\omega'}{2}$, de sorte que l'un des points rationnels fondamentaux soit sur la branche paire. Nous pouvons toujours supposer qu'il n'y en a qu'un. Si, en effet, nous avions sur cette branche paire deux points fondamentaux d'arguments β et γ, nous pourrions les remplacer par les points dont les arguments sont β et

$-\beta-\gamma$ et le second de ces nouveaux points fondamentaux serait sur la branche impaire.

Supposons donc $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ réels et soit

$$\alpha_q = \beta + \frac{\omega'}{2},$$

β étant réel; alors les points rationnels de la branche impaire seront donnés par la formule

$$\alpha + 3n\alpha + p_1(\alpha_1-\alpha) + p_2(\alpha_2-\alpha) + \ldots$$
$$+ p_{q-1}(\alpha_{q-1}-\alpha) + 2p_q(\beta-\alpha).$$

A chacun des points rationnels de la branche impaire en correspondra un sur la branche paire et la différence des arguments de deux points correspondants sera $\beta - \alpha + \frac{\omega'}{2}$.

A ce point de vue, nous devons considérer trois catégories de cubiques rationnelles (outre celles de rang zéro qui n'ont pas de point rationnel) : 1° celles qui n'ont qu'une seule branche; 2° celles qui ont deux branches, mais n'ont de points rationnels que sur la branche impaire; 3° celles qui ont deux branches et des points rationnels sur les deux branches.

Nous devons encore faire une autre distinction; il peut se faire que, parmi les quantités

$$(3) \qquad 2n\alpha + p_1(\alpha_1-\alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q-\alpha)$$

(qui représentent les différentes valeurs que peuvent prendre les différences des arguments des points rationnels), il y en ait qui soient des parties aliquotes d'une période réelle. Considérons toutes celles des quantités (3) qui sont ainsi commensurables avec la période réelle, période que j'appellerai ω; leur plus grand commun diviseur fera encore partie des quantités (3) et comme toutes ces quantités ne sont définies qu'à un multiple près de ω, le plus grand commun diviseur de ω et de celles des quantités (3) qui sont commensurables avec ω pourra encore être regardé comme faisant partie de ces quantités (3).

Soit $\frac{\omega}{m}$ ce plus grand commun diviseur; tous les multiples de $\frac{\omega}{m}$ feront partie des quantités (3) et ce seront les seules quantités (3) qui soient commensurables avec ω.

Nous pourrons supposer alors soit $\alpha = \frac{\omega}{3m}$, soit $\alpha_1 = \alpha + \frac{\omega}{m}$.

La connaissance du nombre m, s'il existe des quantités (3) commensurables avec ω, est évidemment aussi un des éléments les plus importants de la classification des cubiques rationnelles.

Il arrivera quelquefois que le seul point rationnel fondamental sera $\frac{\omega}{3m}$; plus généralement, il pourra se faire que les points rationnels soient tous donnés par l'une des formules :

$$(4) \qquad \frac{K\omega}{m}, \quad \frac{K\omega}{m} + \frac{\omega}{3m}, \quad \frac{K\omega}{m} + \frac{2\omega}{3m};$$

ou bien que les points rationnels de la branche impaire étant donnés par l'une des formules (4), ceux de la branche paire s'en déduisent en ajoutant aux arguments elliptiques soit $\frac{\omega'}{2}$, soit $\frac{\omega}{2m} + \frac{\omega'}{2}$.

Dans ces divers cas il n'y aura qu'un nombre fini de points rationnels; dans tous les autres cas il y en aura une infinité; j'ajouterai qu'il y en aura une infinité sur tout arc de la cubique si celle-ci n'a qu'une branche, sur tout arc de sa branche impaire si elle a deux branches, et enfin sur tout arc de l'une quelconque des deux branches s'il y a deux branches et qu'il y ait des points rationnels sur chaque branche.

Ainsi se pose naturellement le problème suivant :

Quelles valeurs peut-on attribuer au nombre entier que nous avons appelé le rang *d'une cubique rationnelle? Quelles sont, parmi les catégories que nous venons d'énumérer et qui sont jusqu'ici logiquement possibles, celles qui existent réellement?*

IV. — Autres courbes de genre 1.

Les principes précédents sont applicables à des courbes quelconques de genre 1.

Considérons, par exemple, une quartique gauche. Chaque point de cette courbe possède un argument elliptique; et la somme des arguments des quatre intersections de la courbe et d'un plan est nulle.

Si donc les points α, β, γ sont rationnels, il en est de même du point

$$-\alpha-\beta-\gamma.$$

Si le point α est rationnel, il en est donc de même du point -3α, puis des points

$$5\alpha = -[\alpha+2(-3\alpha)],$$
$$-7\alpha = -[5\alpha+\alpha+\alpha],$$
$$9\alpha = -[(-7\alpha)+\alpha+(-3\alpha)],$$
$$-11\alpha = -[9\alpha+\alpha+\alpha],$$

et, en général, de tous les points $(4n+1)\alpha$.

Si γ, β et α sont rationnels, il en sera de même de

$$-\alpha-\beta-\gamma$$

et de

$$-(2\alpha+\gamma)$$

et, par conséquent, de

$$\gamma+\beta-\alpha = -[2\alpha+(-\alpha-\beta-\gamma)].$$

Si donc

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q$$

sont rationnels, il en sera de même de

$$(1)\qquad (4n+1)\alpha+p_1(\alpha_1-\alpha)+p_2(\alpha_2-\alpha)+\ldots+p_q(\alpha_q-\alpha),$$

quels que soient les entiers $n, p_1, p_2, \ldots, p_q$.

C'est là une formule analogue à la formule (1) du paragraphe précédent et qui se discuterait de la même manière.

Considérons plus généralement une courbe de genre 1 et de degré m dans l'espace à $m-1$ dimensions. Un *plan* coupera cette courbe en m points et la somme de leurs arguments elliptiques sera nulle.

Le même raisonnement pourra donc s'appliquer.

Si $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont rationnels, il en sera de même de

$$-(\alpha_1, + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1})$$

et des divers points

$$-(m-1)\alpha, \quad -\alpha_2-(m-2)\alpha, \quad -\alpha_2-\alpha_1-(m-3)\alpha,$$
$$-\alpha_2+(\alpha_1-\alpha) = -\{-(m-2)\alpha - [-\alpha_2-\alpha_1-(m-3)\alpha]\},$$

et plus généralement de

$$(nm+1)\alpha + p_1(\alpha_1-\alpha) + p_2(\alpha_2-\alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q-\alpha),$$

formule analogue à la formule (1).

On arriverait aisément aux mêmes résultats en raisonnant directement sur les courbes planes. Soit C une courbe plane de degré m et de genre 1; elle aura

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1$$

points doubles. Par ces points doubles je peux faire passer ∞^{m-1} courbes d'ordre $m-2$ qui couperont la courbe en m points mobiles: j'appelle ces courbes K. Si nous avons $m-1$ points rationnels d'arguments elliptiques

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1},$$

par ces points je pourrai faire passer une courbe K, cette courbe coupera C en un $m^{\text{ième}}$ point qui aura pour argument

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1})$$

et qui sera évidemment rationnel.

Le reste du raisonnement se poursuit comme plus haut.

Cherchons maintenant dans quels cas une quartique ou une courbe de degré plus grand peut être équivalente à une cubique.

Soit d'abord une quartique plane rationnelle quelconque de genre 1. Supposons qu'elle possède un point rationnel P. Par ce point P et par les deux points doubles, je puis faire passer ∞^2 coniques, qui couperont la quartique en trois points mobiles. L'équation générale de ces coniques pourrait s'écrire

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0,$$

les α étant des arbitraires et les φ des polynomes du second degré à coefficients rationnels.

Considérons alors la transformation

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1} = \frac{\xi_2}{\varphi_2} = \frac{\xi_3}{\varphi_3},$$

où les ξ sont considérés comme les coordonnées homogènes d'un point dans un plan. Elle transforme notre quartique en une cubique, et l'on verrait, comme pour la transformation (1) du § II, que c'est une transformation purement rationnelle.

La quartique est donc équivalente à une cubique.

Réciproquement, considérons une quartique et supposons qu'elle soit équivalente à une cubique, je dis qu'elle admettra un point rationnel.

En effet, soit u l'argument elliptique d'un point de la quartique; l'argument elliptique du point correspondant de la cubique sera $u+k$, k étant une constante. Si trois points de la cubique sont sur une droite rationnelle, les trois points correspondants de la quartique, qui auront pour arguments elliptiques α, β, γ, formeront un groupe rationnel, et l'on aura

$$\alpha + \beta + \gamma = -3k.$$

Par ces trois points et les deux points doubles je puis faire passer une conique qui sera rationnelle et qui coupera la quartique en un

autre point qui, étant unique, devra être rationnel. Ce point rationnel aura pour argument $-\alpha-\beta-\gamma$, c'est-à-dire $3k$.

La cubique devra avoir aussi un point rationnel. En effet, par les points doubles de la quartique je fais passer une conique rationnelle qui coupe la quartique en quatre points simples. Les quatre points correspondants sur la cubique formeront un groupe rationnel. Par les quatre points de ce groupe je puis faire passer une infinité de coniques rationnelles, qui couperont la cubique en deux autres points. Ces deux points formeront un couple rationnel. En joignant les deux points d'un de ces couples rationnels on obtiendra une droite rationnelle qui coupera la cubique en un troisième point qui sera rationnel.

C. Q. F. D.

Réciproquement, si une cubique a un point rationnel P, elle est équivalente à une quartique. En effet, je considère dans l'espace un point rationnel quelconque S; et je considère ce point comme le sommet d'un cône C du troisième degré ayant pour directrice la cubique. Par le point P je puis faire passer une droite rationnelle quelconque qui coupe la cubique en deux points M et M_1 formant un couple rationnel. Par les droites SM et SM_1 je puis faire passer une surface du second degré rationnelle. L'intersection complète de cette surface et du cône étant du sixième degré se décompose en deux droites SM et SM_1 et une quartique gauche rationnelle. La projection de cette quartique gauche sur un plan rationnel quelconque est une quartique plane rationnelle.

En résumé :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quartique rationnelle soit équivalente à une cubique, c'est qu'elle ait un point rationnel.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une cubique rationnelle soit équivalente à une quartique, c'est qu'elle ait un point rationnel.

Soit $f=0$ une courbe plane de genre 1 et de degré m. Quelle est la condition pour qu'elle soit équivalente à une courbe de degré p, dont l'équation sera $f_1=0$?

Il faut d'abord qu'il y ait sur $f=0$ un groupe rationnel de p points.

Si, en effet, nous coupons la transformée $f_1=0$ par une droite ra-

tionnelle quelconque, cette droite la coupera en p points formant un groupe rationnel. Les points correspondants sur $f=0$ formeront aussi un groupe rationnel.

Je dis maintenant que cette condition est suffisante. En effet, s'il existe un groupe rationnel de p points, par ce groupe et par les points doubles je pourrai faire passer une infinité de courbes de degré $m-3+k$, dont l'équation générale sera

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_q\varphi_q+\theta f=0,$$

où $q=km-p$, où les α sont des arbitraires, les φ des polynomes d'ordre $m-3+k$ à coefficients rationnels et θ un polynome arbitraire de degré $k-3$ (le terme θf disparaît si $k<3$).

Ces courbes couperont $f=0$ en $km-p$ points mobiles. Si l'on donne aux α des valeurs rationnelles, ces $km-p$ points formeront un groupe rationnel.

Considérons maintenant un de ces groupes rationnels de $km-p$ points, par ce groupe et les points doubles nous pourrons faire passer une infinité de courbes de degré $m-3+k$, dont l'équation générale sera

$$(2)\qquad \alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2+\ldots+\alpha_p\psi_p+\eta f=0,$$

où les α sont des arbitraires, les ψ des polynomes d'ordre $m-3+k$ à coefficients rationnels et η un polynome arbitraire d'ordre $k-3$.

Ces courbes couperont $f=0$ en p points mobiles. Si alors on considère la transformation

$$\frac{\xi_1}{\psi_1}=\frac{\xi_2}{\psi_2}=\frac{\xi_3}{\psi_3}$$

(où les ξ sont les coordonnées homogènes d'un point dans un plan), elle sera purement rationnelle, toujours en vertu du raisonnement, et elle transformera $f=0$ en une courbe de degré p [parce que les courbes (2) coupent $f=0$ en p points mobiles].

Cette démonstration suppose :

1° Que $km>p$, on peut toujours prendre k assez grand pour cela;

2° Que $p \geq 3$. Si $p = 1$ ou 2, il est clair que le théorème est en défaut, puisqu'il n'y a pas de courbe de genre 1 et de degré 1 ou 2.

Si $p = 1$, c'est-à-dire s'il y a un point rationnel, il existe aussi un groupe rationnel de trois points (à savoir le groupe qui comprendrait trois points confondus entre eux et avec ce point rationnel); la courbe est donc équivalente à une cubique. Et l'on démontrerait de même qu'elle est équivalente à une courbe de degré quelconque.

Si $p = 2$, c'est-à-dire s'il y a un couple rationnel, il existe aussi un groupe rationnel de quatre points (à savoir le groupe qui comprendrait quatre points confondus deux à deux et avec les deux points du couple); la courbe est donc équivalente à une quartique. Et l'on démontrerait de même qu'elle est équivalente à une courbe d'un degré *pair* quelconque.

Si m est impair et qu'il y ait un couple rationnel, il y a aussi un point rationnel. Car, par les points doubles et par un groupe rationnel de $m - 1$ points qui comprendrait $m - 1$ points confondus $\frac{m-1}{2}$ à $\frac{m-1}{2}$ et avec les deux points du couple, on peut faire passer une courbe de degré $m - 2$ et une seule. Cette courbe est rationnelle et elle coupe $f = 0$ en un autre point qui est unique et rationnel.

En résumé :

Pour qu'une courbe rationnelle de genre 1 et de degré m soit équivalente à une courbe de degré $p > 3$, il faut et il suffit qu'elle possède un groupe rationnel de p points.

Pour aller plus loin, supposons que notre courbe, de degré m, admette un certain nombre de groupes rationnels. Supposons-en trois pour fixer les idées.

Soient G_1, G_2, G_3 ces groupes qui seront formés respectivement de p_1, p_2 et p_3 points. Soit δ le plus grand commun diviseur des quatre nombres

$$m, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3.$$

Je dis qu'il existe un groupe rationnel de δ points.

En effet, on peut trouver quatre nombres entiers positifs

$$K, \quad h_1, \quad h_2, \quad h_3,$$

tels que

$$Km - h_1 p_1 - h_2 p_2 - h_3 p_3 = \delta.$$

Nous pourrons alors mener une infinité de courbes de degré

$$m - 3 + K,$$

passant par les points doubles et ayant avec $f = 0$ un contact d'ordre $h_1 - 1$ aux points du groupe G_1, d'ordre $h_2 - 1$ aux points du groupe G_2, d'ordre $h_3 - 1$ aux points du groupe G_3. Parmi ces courbes, il y en aura une infinité qui seront rationnelles.

Elles couperont $f = 0$, aux points doubles, en $h_1 p_1$ points confondus avec le groupe G_1, en $h_2 p_2$ points confondus avec le groupe G_2, en $h_3 p_3$ points confondus avec le groupe G_3, et en

$$Km - h_1 p_1 - h_2 p_2 - h_3 p_3 = \delta$$

autres points. Ces δ points formeront un groupe rationnel.

C. Q. F. D.

Soit alors δ le plus petit nombre tel qu'il existe sur $f = 0$ un groupe rationnel de δ points. D'après ce qui précède :

1° Le degré m est un multiple de ce nombre caractéristique δ;

2° Il en est de même du degré de toutes les courbes équivalentes à $f = 0$;

3° Il en est encore de même du nombre des points d'un groupe rationnel quelconque de $f = 0$.

Ce nombre caractéristique δ est donc un des éléments les plus importants de la classification des courbes rationnelles de genre 1.

Il me reste à parler d'un point de détail.

Considérons une quartique gauche équivalente à une cubique plane. Par exemple, la cubique sera la perspective de cette quartique, en prenant pour point de vue un point S de la quartique.

D'après ce qui précède, ce point S doit être rationnel. Soit α son argument elliptique sur la quartique et

$$\alpha' = \alpha + k$$

son argument sur la cubique. Soient, d'autre part,

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$$

les arguments des autres points rationnels fondamentaux sur la quartique et

$$\alpha'_i = \alpha_i + k \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9)$$

leurs arguments sur la cubique.

Nous avons vu que les arguments des points rationnels sur la quartique sont donnés par la formule :

$$\beta = \alpha + 4u\alpha + \Sigma p_i(\alpha_i - \alpha),$$

et sur la cubique par la formule

$$\beta' = \alpha' + 3u\alpha' + \Sigma p_i(\alpha'_i - \alpha').$$

Il faut démontrer que ces deux formules concordent, c'est-à-dire que l'on a

$$\beta' = \beta + k.$$

Or c'est ce qui est évident, si l'on observe que

$$3k = \alpha, \qquad \alpha_i - \alpha = \alpha'_i - \alpha', \qquad 3\alpha' = 4\alpha.$$

V. — Étude de quelques transformations.

Soit α l'argument d'un point rationnel quelconque sur une cubique; la transformation qui change le point d'argument u, dans le point d'argument $-\alpha - u$, sera évidemment (les trois points α, u, $-\alpha - u$ étant en ligne droite) une transformation *purement rationnelle* qui changera la cubique en elle-même.

Si α et β sont les arguments de deux points rationnels, les transformations

$$(u, \; -\alpha - u),$$

$$(u, -\beta - u)$$

seront purement rationnelles; il en sera de même de leur résultante

$$(u, \beta - \alpha + u).$$

D'ailleurs, si α est rationnel, il en est de même de -2α, de sorte que la transformation $(u, 3\alpha + u)$ est purement rationnelle.

Étudions de plus près ces transformations $(u, \beta - \alpha + u)$.

Si x, y, z sont les coordonnées du point d'argument u, et ξ, η, ζ celles du point transformé d'argument $\beta - \alpha + u$, les équations de la transformation devront être de la forme

$$(1) \qquad \frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z},$$

X, Y, Z étant des polynomes entiers en x, y, z à coefficients rationnels.

Comment former ces polynomes?

La droite $x = 0$ coupera la cubique en trois points M_1, M_2, M_3 d'arguments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Considérons les transformés de ces trois points par la transformation inverse de (1), qui auront pour arguments

$$\alpha - \beta + \gamma_1, \quad \alpha - \beta + \gamma_2, \quad \alpha - \beta + \gamma_3,$$

et que j'appellerai M'_1, M'_2, M'_3.

On aura

$$(2) \qquad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0.$$

Considérons d'abord trois points P_1, P_2, P_3 d'arguments $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, assujettis à la condition unique

$$(3) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\beta - 3\alpha.$$

On pourra choisir ces trois points de façon qu'ils forment un groupe rationnel.

Les six points $M'_1, M'_2, M'_3, P_1, P_2, P_3$ seront, à cause des relations (2) et (3), sur une même conique, et cette conique sera ration-

nelle. Soit

$$X_1 = 0$$

l'équation de cette conique; je puis supposer qu'elle est écrite de telle façon que les coefficients de X_1 soient entiers et premiers entre eux.

D'autre part, la droite $y = 0$ coupe la cubique en trois points N_1, N_2, N_3 ayant pour transformés N'_1, N'_2, N'_3. Les six points N'_1, N'_2, N'_3, P_1, P_2, P_3 sont sur une même conique rationnelle dont l'équation peut s'écrire

$$Y_1 = 0,$$

les coefficients de Y étant entiers et premiers entre eux.

De même, la droite $z = 0$ coupe la cubique en trois points Q_1, Q_2, Q_3 ayant pour transformés Q'_1, Q'_2, Q'_3. Les six points Q'_1, Q'_2, Q'_3, P_1 P_2, P_3 sont sur une même conique rationnelle dont l'équation peut s'écrire

$$Z_1 = 0,$$

les coefficients de Z étant entiers et premiers entre eux.

Considérons alors la fonction

$$\frac{XY_1}{YX_1};$$

ce sera une fonction doublement périodique de l'argument elliptique du point x, y, z; cette fonction ne pourra devenir infinie, car le dénominateur ne peut s'annuler sans que le numérateur s'annule. Elle se réduira donc à une constante; pour la même raison

$$\frac{XZ_1}{ZX_1}$$

est une constante. Nous pourrons donc poser

$$X = aX_1, \qquad Y = bY_1, \qquad Z = cZ_1,$$

a, b, c étant trois entiers premiers entre eux.

Ainsi la transformation (1) peut s'écrire de telle façon que X, Y, Z

soient des polynomes du second ordre. Cela est même possible d'une infinité de manières, car les trois points P_1, P_2, P_3 ne sont assujettis qu'à une seule égalité.

Soient X', Y', Z' trois polynomes du second degré formés comme X, Y, Z, mais en remplaçant les trois points P_1, P_2, P_3 par trois autres points P'_1, P'_2, P'_3 assujettis comme eux à la condition (3). La transformation

$$(1\ bis) \qquad \frac{\xi}{X'} = \frac{\eta}{Y'} = \frac{\zeta}{Z'}$$

devra être la même que la transformation (1); je veux dire par là qu'un point de la cubique $f = 0$ a même transformé, qu'on lui applique l'une ou l'autre des deux transformations. Les deux transformations (1) et (1 *bis*) pourraient être appliquées à un point quelconque du plan; mais alors les deux transformés ne seraient pas les mêmes.

Il résulte de là que les trois polynomes du quatrième degré

$$YZ' - ZY', \quad ZX' - XZ', \quad XY' - YX'$$

sont divisibles par f.

Il importe de remarquer que la transformation (1) est une *transformation Cremona* : c'est-à-dire qu'on peut en tirer les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ en fonctions rationnelles de ξ, η, ζ, alors même que le point x, y, z n'est pas assujetti à rester sur la cubique ; et, en effet, deux des coniques

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \qquad \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z = 0$$

ne se coupent qu'en un seul point mobile, en dehors des trois points fixes P_1, P_2, P_3.

Ces trois points fixes sont les *points-bases* de la transformation.

Si l'on résout les équations (1), on trouve

$$(4) \qquad \frac{x}{X_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{y}{Y_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{z}{Z_0(\xi, \eta, \zeta)},$$

X_0, Y_0, Z_0 étant des polynomes du second degré. La transforma-

tion (4) est ainsi la transformation inverse de (1). Quels sont les points-bases de cette transformation inverse?

Je rappelle que, dans une transformation quadratique Cremona, toute droite passant par un point-base se transforme en une droite passant par un point-base de la transformation inverse.

Soit donc une droite D passant par P_1; elle coupera la cubique en deux autres points H_1 et H_2; la somme des arguments de ces deux points sera constante et égale à $-\varepsilon_1$. Soient H'_1 et H'_2 les transformés de H_1 et H_2; la somme de leurs arguments sera constante et égale à

$$2(\beta-\alpha)-\varepsilon_1.$$

La droite H'_1, H'_2, transformée de D, coupera la cubique en un troisième point R_1 dont l'argument sera

$$\varepsilon_1-2(\beta-\alpha).$$

Cette quantité étant constante, ce point R_1 restera fixe quand la droite D tournera autour de P_1. Donc R_1 est un des points-bases de (4). Les deux autres, R_2 et R_3, auront pour arguments

$$\varepsilon_2-2(\beta-\alpha),$$
$$\varepsilon_3-2(\beta-\alpha).$$

Ainsi les trois points-bases de (4) sont encore sur la cubique, et la somme de leurs arguments est

$$3\alpha-3\beta.$$

Si donc nous considérons les trois points R_1, R_2, R_3, leurs transformés, que j'appellerai Q_1, Q_2, Q_3, seront en ligne droite, et les transformés de leurs transformés sont les trois points P_1, P_2 et P_3.

Considérons maintenant l'expression

$$f(X, Y, Z);$$

c'est un polynome du sixième degré en x, y, z; comme la transfor-

mation n'altère pas la cubique $f=0$, on aura identiquement

$$(5) \qquad f(X, Y, Z) = f(x, y, z)\,\eta_1(x, y, z),$$

η_1 étant un polynome du troisième degré.

Comme les trois points-bases P_1, P_2, P_3 doivent être des points triples pour la sextique

$$f(X, Y, Z) = 0$$

et que ce sont des points simples pour la cubique

$$f(x, y, z) = 0,$$

ce seront des points doubles pour la cubique $\eta_1 = 0$; de sorte que cette cubique $\eta_1 = 0$ se décomposera en trois droites qui seront les côtés du triangle $P_1P_2P_3$.

D'autre part, les transformations (1) et (4) étant inverses l'une de l'autre, on aura

$$\frac{X_0(X, Y, Z)}{x} = \frac{Y_0(X, Y, Z)}{y} = \frac{Z_0(X, Y, Z)}{z} = \eta_1',$$

ou

$$(6) \qquad \begin{cases} X_0(X, Y, Z) = x\eta_1', \\ Y_0(X, Y, Z) = y\eta_1', \\ Z_0(X, Y, Z) = z\eta_1'. \end{cases}$$

Les premiers membres étant des polynomes du quatrième degré, η_1' sera un polynome du troisième degré; les trois points-bases étant des points doubles pour les quartiques

$$X_0(X, Y, Z) = 0, \qquad Y_0 = 0, \qquad Z_0 = 0,$$

seront aussi des points doubles pour la cubique $\eta_1' = 0$. Cette cubique se décompose ainsi encore en trois droites qui sont les trois côtés du triangle $P_1P_2P_3$.

Ainsi les deux polynomes η_1 et η_1' ne peuvent différer que par un facteur constant.

Le polynome η est décomposable *au point de vue algébrique* en trois facteurs linéaires; mais il n'arrivera pas toujours que cette décomposition soit possible au point de vue arithmétique. Cela arrivera si les trois points P_1, P_2 et P_3 sont rationnels. Il est clair qu'il est toujours possible de choisir ces trois points (qui sont assujettis seulement à la condition 3) de telle façon qu'ils soient rationnels; et cela d'une infinité de manières en prenant

$$\varepsilon_i = q_i(\beta - \alpha) + \alpha + 3p_i\alpha \qquad (i = 1, 2, 3),$$

avec la condition

$$q_1 + q_2 + q_3 = 3, \qquad p_1 + p_2 + p_3 = -1.$$

C'est la supposition que nous adopterons désormais, sauf avis contraire.

Supposons que x, y, z soient trois entiers premiers entre eux; X, Y, Z sont également trois entiers; il importe de savoir quel est leur plus grand commun diviseur S.

Observons que

$$X_0(X, Y, Z), \quad Y_0(X, Y, Z), \quad Z_0(X, Y, Z)$$

sont divisibles par S^2. Il en résulte que η' est divisible par S^2. C'est déjà une considération qui pourra nous aider à déterminer S.

Considérons de nouveau les neuf points

$$P_i, \quad Q_i, \quad R_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous avons vu qu'ils ont pour arguments

$$\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i - (\beta - \alpha), \quad \varepsilon_i - 2(\beta - \alpha),$$

avec la condition

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3(\beta - \alpha).$$

De là résulte immédiatement que ces neuf points se trouvent trois à

trois sur sept droites, qui sont les droites

$$Q_1Q_2Q_3,\quad P_1Q_2R_3,\quad P_3Q_2R_1,\quad Q_1R_2P_3,$$
$$P_1R_2Q_3\quad Q_1P_2R_3,\quad R_1P_2Q_3.$$

De plus, la somme des arguments des neuf points (de même que celle des arguments des six points P_i et R_i) étant nulle, on conclut que les six points P_i et R_i sont sur une même conique C, et que les neuf points sont sur une infinité de cubiques.

On voit alors que les six points P_i et R_i sont les sommets d'un hexagone de Pascal inscrit dans une conique C, et que les points Q_1, Q_2, Q_3 en ligne droite sont les intersections des trois paires de côtés opposés de cet hexagone.

Considérons les cubiques qui passent par les neuf points; elles forment un faisceau. L'une d'elles est la cubique proposée $f = 0$. Une se décompose en une conique qui est la conique C circonscrite à l'hexagone de Pascal, et en une droite qui est $Q_1Q_2Q_3$. Deux des cubiques se décomposent en trois droites qui sont pour l'une d'elles

$$(7)\qquad R_1Q_2P_3,\quad R_3Q_1P_2,\quad R_2Q_3P_1$$

et pour l'autre

$$(8)\qquad R_1Q_3P_2,\quad R_2Q_1P_3,\quad R_3Q_2P_1.$$

La transformation change la cubique f en elle-même; elle change la conique C dans la droite $Q_1Q_2Q_3$ et inversement; elle change les trois droites (7) les unes dans les autres, de même que les trois droites (8). Il y a donc quatre cubiques du faisceau pour lesquelles on voit immédiatement qu'elles ne sont pas altérées par la transformation. Il suffirait de le savoir de deux d'entre elles pour conclure que cela est vrai pour toutes les cubiques du faisceau.

Toutes les cubiques du faisceau sont donc inaltérées par la transformation (1). Si

$$f(x, y, z) = 0,\qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

sont les équations de deux de ces cubiques, on aura évidemment

$$f(X, Y, Z) = f(x, y, z)\eta,$$
$$\varphi(X, Y, Z) = \varphi(x, y, z)a\eta,$$

a étant une constante, et de même

$$f(X, Y, Z) + \lambda\varphi(X, Y, Z) = [f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)]b\eta,$$

b étant une autre constante. Or cela n'est possible que si $a = b = 1$; d'où il suit que le coefficient η qui figure dans l'équation (5) est le même pour toutes les cubiques du faisceau.

Soit maintenant

$$D = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

l'équation de la droite $Q_1 Q_2 Q_3$; soit

$$S(x, y, z) = 0$$

celle de la conique C; je supposerai que les coefficients du polynome D, de même que ceux du polynome S sont premiers entre eux. L'équation de C pourra également se mettre sous l'une des deux formes

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \qquad \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = 0,$$

de sorte que nous aurons identiquement

$$\alpha X \ + \beta Y \ + \gamma Z \ = \theta S,$$
$$\alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma Z_0 = \theta_0 S,$$

θ et θ_0 étant des entiers.

Nous trouverons ensuite

$$\theta_0 S(X, Y, Z) = \alpha X_0(X, Y, Z) + \beta Y_0(X, Y, Z) + \gamma Z_0(X, Y, Z) = D\eta$$

et, d'autre part,

$$S(X, Y, Z)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \eta S(x, y, z)D;$$

d'où

$$\theta_0 \eta_1 SD = \theta \eta_1' SD$$

et enfin

$$\theta_0 \eta_1 = \theta \eta_1'.$$

VI. — Subdivision des classes en sous-classes.

Soient C et C' deux cubiques équivalentes; on pourra passer de C à C' par une transformation purement rationnelle T qui, comme nous allons le voir, sera généralement une transformation quadratique. Soit

$$(1) \qquad \frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z}$$

cette transformation où X, Y, Z seront des polynomes entiers à coefficients rationnels. La droite $x = 0$ coupera la cubique C' en trois points M_1, M_2, M_3 d'arguments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Soient M'_1, M'_2, M'_3 les transformés de ces trois points par la transformation T^{-1} inverse de T: ces trois points seront sur la cubique C et auront pour arguments

$$\gamma_1 - k, \quad \gamma_2 - k, \quad \gamma_3 - k \quad (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0).$$

Par ces trois points qui formeront sur C un groupe rationnel et par deux points rationnels quelconques du plan, je puis faire passer une conique rationnelle qui coupera C en trois autres points que j'appellerai P_1, P_2, P_3, qui formeront un groupe rationnel et dont les arguments $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ seront liés par la relation

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3k.$$

Soit $X_1 = 0$, l'équation de cette conique.

D'autre part la droite $y = 0$ coupera C' en trois points N_1, N_2, N_3 dont les transformés par T^{-1} que j'appelle N'_1, N'_2, N'_3 auront des arguments dont la somme sera $-3k$ (pour la même raison que la somme des arguments des trois points M'_1, M'_2, M'_3).

Il résulte de là que les six points N'_1, N'_2, N'_3, P_1, P_2, P_3 sont sur une

même conique qui est rationnelle puisque ces six points forment deux groupes rationnels. Soit $Y_1 = 0$ l'équation de cette conique.

Enfin la droite $z = 0$ coupera C' en trois points dont les transformés par T^{-1} seront avec P_1, P_2 et P_3 sur une même conique rationnelle dont l'équation sera $Z_1 = 0$.

Les polynomes X_1, Y_1, Z_1 sont du deuxième degré et à coefficients rationnels.

On verrait comme dans le paragraphe précédent que les fonctions doublement périodiques

$$\frac{XY_1}{YX_1}, \quad \frac{XZ_1}{ZX_1}$$

se réduisent à des constantes rationnelles que nous pouvons supposer égales à 1 sans restreindre la généralité. On peut donc prendre

$$X = X_1, \qquad Y = Y_1, \qquad Z = Z_1.$$

Ainsi l'on peut toujours supposer que les polynomes X, Y et Z sont du deuxième degré et sont les premiers membres de l'équation de trois coniques ayant trois points communs. Il en résulte que la transformation T est une transformation quadratique Cremona, ayant pour points-bases P_1, P_2, P_3. Si nous résolvons les équations (1) nous trouvons

$$(2) \qquad \frac{x}{X_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{y}{Y_0(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{z}{Z_0(\xi, \eta, \zeta)},$$

X_0, Y_0, Z_0 étant trois polynomes du deuxième degré à coefficients rationnels.

Les équations (2) définiront la transformation T^{-1} inverse de T. Quels sont les points-bases de cette transformation?

Soit D une droite quelconque passant par P_1 ; elle coupera C en deux autres points H_1 et H_2 dont les arguments u et v devront satisfaire à la relation

$$u + v + \varepsilon_1 = 0.$$

Les transformés H'_1 et H'_2 de ces deux points seront sur C' et auront pour arguments $u + k$ et $v + k$. La transformée de D est une conique

qui doit se décomposer en deux droites dont l'une est la droite $R_2 R_3$ et l'autre est la droite $H_1 H'_2$ qui doit passer par R_1.

Or la droite $H'_1 H'_2$ coupe C' en un troisième point dont l'argument doit être : $\varepsilon_1 - 2k$. Il reste donc fixe quand la droite D tourne autour du point P_1. Ce ne peut donc être que le point R_1.

En résumé les trois points-bases de (2) sont sur C' et ont pour arguments

$$\varepsilon_1 - 2k, \quad \varepsilon_2 - 2k, \quad \varepsilon_3 - 2k.$$

Remarquons que notre transformation Cremona (1) transforme toute cubique passant par les trois points P_1, P_2, P_3 en une cubique passant par les trois points R_1, R_2, R_3.

Quelle est la condition pour que parmi ces cubiques il y en ait qui, tout en étant de genre 1, soient leur propre transformée? D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, il faut d'abord que les six points-bases soient sur une même conique. Si cette condition est remplie cette conique se transformera en une droite, de sorte que les trois points R_1, R_2, R_3 auront pour transformés trois points Q_1, Q_2, Q_3 en ligne droite.

Il faut ensuite que ces trois points Q soient les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone des points P et R. Si cette condition est remplie nous avons vu que les cubiques qui passent par les neuf points P, Q, R ne sont pas altérées par la transformation.

Il résulte d'abord de là que si la cubique C est équivalente à la cubique C' et de telle façon que les arguments des points correspondants diffèrent de k, il y aura sur C une infinité de groupes rationnels de trois points dont la somme des arguments sera $-3k$. Ce sont les points dont les transformés sont sur une droite rationnelle. Il y aura aussi sur C une infinité de groupes rationnels de trois points (je dirai de *triplets* rationnels ou simplement de triplets) dont la somme des arguments soit $-3k$, comme par exemple le triplet P_1, P_2, P_3.

Réciproquement s'il existe un triplet P_1, P_2, P_3 dont la somme des arguments soit $-3k$, la cubique C sera équivalente à une cubique C' de telle façon que les arguments des points correspondants diffèrent de k à un tiers de période près. En effet ces trois points formant un groupe rationnel, on pourra faire passer par ces trois points trois

coniques rationnelles

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

La transformation Cremona

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z}$$

changera alors C en une autre cubique C′ satisfaisant à la condition proposée.

Si maintenant il existe un triplet dont la somme soit $3k$, il en existera une infinité dont la somme sera $-3k$; car par ce triplet on pourra faire passer une infinité de coniques rationnelles; chacune d'elles coupera la cubique en trois autres points formant un groupe rationnel de somme $-3k$. On en conclut immédiatement que s'il existe un triplet de somme $3k$, il y en a une infinité.

Je dis maintenant que s'il existe sur C un triplet de somme $3k$, il y en a une infinité de somme $3nk$, n étant un entier quelconque positif ou négatif. Pour cela, d'après ce qui précède, il me suffira d'établir que s'il y a un triplet de somme $3n'k$ et un triplet de somme $3n''k$, il y en aura aussi un de somme $-3k(n'+n'')$ et par conséquent un de somme $3k(n'+n'')$. Considérons en effet six points formant deux triplets de sommes $3n'k$ et $3n''k$.

Par ces six points et par trois points rationnels quelconques du plan, je pourrai faire passer une cubique qui sera rationnelle. Cette cubique coupera C en trois autres points formant un groupe rationnel et la somme des arguments sera $-3k(n'+n'')$. C. Q. F. D.

De là résulte la conséquence suivante :

Si C est équivalente à une cubique C_1, de telle façon que les arguments des points correspondants sur C et C_1 diffèrent de k, elle sera aussi équivalente à une infinité d'autres cubiques $C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$, $C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, \ldots$; et cela de telle façon que les arguments des points correspondants sur C et C_n diffèrent de nk.

Une question se pose ensuite. D'après nos définitions deux cubiques sont équivalentes ou appartiennent à la même *classe* si l'on peut pas-

ser de l'une à l'autre par une transformation *birationnelle* à coefficients rationnels. Je dirai qu'elles appartiennent à la même *sous-classe* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation *linéaire* à coefficients rationnels (je ne dis pas entiers).

On peut alors se demander si toutes les cubiques C_n que je viens de définir appartiennent à des sous-classes différentes. Bien que l'on puisse passer de C à C_n par une transformation quadratique, de telle façon que les arguments des points correspondants diffèrent de nk, ce n'est pas une raison pour qu'on ne puisse pas également passer de C à C_n par une transformation *linéaire*, et par exemple de telle façon que les arguments des points correspondants soient égaux.

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que C soit transformable en elle-même par une transformation quadratique, la différence des arguments des points correspondants étant nk.

Or je dis que C n'est pas altérée par une transformation quadratique rationnelle qui change le point d'argument u dans le point d'argument $u+3k$. En d'autres termes, je dis que les coordonnées du point $u+3k$ sont des fonctions rationnelles des coordonnées du point u, ou, si l'on aime mieux, les coordonnées de $u+3k$ seront rationnelles, *après adjonction des coordonnées du point u au domaine de rationalité.*

Soient, en effet, ε_1, ε_2, ε_3 les arguments des points de C qui forment un triplet dont la somme est $-3k$. Par le point u et par un point rationnel quelconque du plan, je fais passer une droite qui coupe C en deux autres points ayant pour arguments v et w; on aura

$$u+v+w=0.$$

Les deux points v et w formeront un couple rationnel *après adjonction des coordonnées du point u.*

Par les cinq points ε_1, ε_2, ε_3 u et w je puis faire passer une conique qui sera rationnelle *après adjonction des coordonnées de u*; cette conique coupera C en un sixième point qui sera rationnel après adjonction des coordonnées de u.

Ce point ne sera autre que le point $u+3k$.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi les cubiques C et C_3 ou, plus généralement, les cubiques C_n et C_{n+3} appartiennent à une même sous-classe. Donc *les cubiques* C_n *se répartissent en trois sous-classes au plus.*

Pour aller plus loin, deux cas sont à distinguer : le premier est celui où la cubique C admet un point rationnel. Si alors α est l'argument de ce point rationnel, et si la cubique C n'est pas altérée par une transformation purement rationnelle telle que les arguments des points correspondants diffèrent de $3k$, le point d'argument $\alpha + 3k$ sera aussi rationnel.

Je dis que C admettra un triplet dont la somme des arguments sera $-3k$, de telle façon qu'elle sera équivalente à une cubique C_1, la différence des arguments des points correspondants étant k. En effet, par le point α je fais passer une droite rationnelle quelconque; elle coupera C en deux points d'arguments β et γ formant un couple rationnel. On aura

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Par les deux points β et γ, par le point rationnel $\alpha + 3k$ et par deux points rationnels quelconques du plan je fais passer une conique qui est rationnelle; elle coupe C en trois autres points qui forment un triplet rationnel et dont la somme des arguments sera

$$-\beta - \gamma - (\alpha + 3k) = -3k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si maintenant la cubique C a un point rationnel, tous ses points rationnels seront compris dans la formule

$$\alpha + 2n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha),$$

la cubique étant supposée de rang $q + 1$.

Je suppose de plus qu'aucune des quantités

$$3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_h(\alpha_h - \alpha)$$

ne soit une partie aliquote d'une période, mais que

$$\alpha_{h+1} - \alpha, \quad \alpha_{h+2} - \alpha, \quad \ldots, \quad \alpha_q - \alpha$$

soient des parties aliquotes d'une période, de telle façon que pour $s < q$

$$m_s(\alpha_s - \alpha)$$

soit une période (m_s étant un entier).

Quel sera le nombre des sous-classes de la classe dont fait partie C?

Quelle est la condition pour qu'il existe une cubique C_k équivalente à C, de telle manière que la différence des arguments soit k?

La condition nécessaire et suffisante c'est qu'il existe une transformation de C en elle-même, la différence des arguments étant $3k$; c'est-à-dire que

$$(3)\quad 3k = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha).$$

Maintenant, deux valeurs k' et k'' de k conduiront à deux cubiques $C_{k'}$ et $C_{k''}$ appartenant à la même sous-classe si

$$(4)\quad k' - k'' = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha)\ (^1).$$

L'équation (3) nous donnera les valeurs de k; on voit qu'à chaque valeur du second membre correspondent neuf valeurs distinctes de k, différant entre elles de $\frac{1}{3}$ de période. Mais il importe de remarquer que ces neuf valeurs ne nous conduiront pas à des cubiques C_k appartenant à des sous-classes différentes. En effet, l'argument d'un point de C_k est défini par cette condition que la somme des arguments de trois points en ligne droite soit égale à zéro (ou plutôt à une période). Mais cette condition ne définit évidemment l'argument qu'à $\frac{1}{3}$ de période près.

A chaque système de valeur des entiers

$$n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_q$$

correspond donc une cubique C_k. Mais si deux pareils systèmes d'en-

[1] C'est d'ailleurs le seul cas où l'on puisse passer de $C_{k'}$ à $C_{k''}$ par une transformation linéaire *de telle façon que la différence des arguments des points correspondants soit une constante;* mais il peut arriver aussi que l'on puisse passer d'une cubique à l'autre par des transformations linéaires d'une autre nature que nous appellerons *impropres*. Nous y reviendrons plus loin.

tiers ne diffèrent que par des multiples de 3, les cubiques correspondantes sont de la même sous-classe. Si le second membre de (3) ou de (4) ne pouvait jamais devenir égal à une partie aliquote d'une période, le nombre des sous-classes serait alors 3^{q+1} au plus.

Mais si, par exemple, $m_q(\alpha_q - \alpha)$ était une période, et que le nombre entier m_q ne fût pas divisible par 3, on pourrait prendre deux systèmes d'entiers

$$n', p'_1, p'_2, \ldots, p'_q,$$
$$n'', p''_1, p''_2, \ldots, p''_q,$$

de telle sorte que chaque nombre du premier système soit égal au nombre correspondant de second système, à l'exception des nombres p'_q et p''_q.

Si alors k' et k'' sont les valeurs de k correspondantes, on aurait

$$k' - k'' = \frac{p'_q - p''_q}{3}(\alpha_q - \alpha).$$

On peut alors prendre

$$\alpha_q - \alpha = \frac{\omega}{m_q},$$

et poser

$$p'_q - p''_q = 3\mu + m_q\nu$$

(μ et ν étant des entiers), d'où

$$k' - k'' = \frac{\mu\omega}{m_q} + \frac{\nu\omega}{3} = (\alpha_q - \alpha) + \frac{1}{3} \text{ de période.}$$

De telle façon que les deux cubiques $C_{k'}$ et $C_{k''}$ seront encore de la même sous-classe.

Donc, pour que deux cubiques soient de la même sous-classe, il suffit que les deux systèmes d'entiers correspondants ne diffèrent que par des multiples de 3, à l'exception de ceux des nombres de ces deux systèmes qui correspondent à des différences $\alpha_s - \alpha$, qui sont des fractions m_s^e d'une période, l'entier m_s n'étant pas divisible par 3.

Si donc il y a q' nombres m_s non divisibles par 3, *notre classe se composera de $3^{q+1-q'}$ sous-classes au plus.*

Considérons, par exemple, la cubique

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

En vertu du théorème de Fermat, elle n'a que trois points rationnels qui sont les trois points d'inflexion en ligne droite,

$$x = y + z = 0, \qquad \arg\ 0,$$

$$y = x + z = 0, \qquad \arg\ \frac{\omega}{3},$$

$$z = x + y = 0, \qquad \arg\ \frac{2\omega}{3}.$$

Il y aura donc, au plus, trois sous-classes distinctes qui correspondent aux valeurs de k,

$$k = 0, \qquad k = \frac{\omega}{9}, \qquad k = \frac{2\omega}{9}.$$

Si nous faisons la transformation

$$\frac{\xi}{x^2 - zx + z^2 - y^2} = \frac{\eta}{xy} = \frac{\zeta}{y(y+z)},$$

dont les points-bases sont les trois points d'inflexion non en ligne droite

$$x = y + z = 0, \qquad y = x^2 - zx + x^2 = 0;$$

et dont la transformation inverse est

$$\frac{x}{\eta(2\zeta - \eta + \xi)} = \frac{y}{\eta^2 - \eta\zeta + \zeta^2} = \frac{z}{\zeta^2 + \xi\zeta - \zeta^2};$$

notre cubique se transforme en la suivante :

$$\eta^3 + \zeta^3 + \xi(\zeta^2 - 2\eta^2 + 2\eta\xi) + \xi^2(\eta + \zeta) = 0,$$

qui appartient à la seconde sous-classe; elle admet trois points rationnels

$$\eta = \zeta = 0, \qquad \zeta = \xi - \eta = 0, \qquad \xi = \eta + \zeta = 0$$

correspondant à ceux de la cubique proposée. Il est aisé de vérifier que chacun d'eux se trouve sur la tangente menée à la courbe en l'un des deux autres; ils ont respectivement pour arguments

$$\frac{\omega}{9}, \quad \frac{4\omega}{9}, \quad \frac{7\omega}{9}.$$

Si l'on voulait maintenant construire une cubique équivalente à la cubique proposée et de telle façon qu'au point d'argument u correspondît le point d'argument $u+\frac{2\omega}{9}$, il suffirait d'intervertir dans nos transformations le rôle des lettres y et z. Il est clair qu'on retomberait de la sorte sur la même transformée.

Nous n'avons donc en tout que deux sous-classes, et le nombre des sous-classes n'atteint pas le maximum prévu par l'analyse précédente, qui serait 3. Cela tient à ce que C est transformable en elle-même par une de ces transformations linéaires impropres dont j'ai dit un mot plus haut et sur lesquelles je vais revenir.

Supposons qu'une cubique C soit transformable en une autre cubique C' par une transformation birationnelle dont je ne suppose pas les coefficients rationnels.

Soit u l'argument d'un point M de C, et u' celui du point correspondant M' de C'. Nous pourrons toujours supposer que ces arguments ont été définis de telle sorte que les périodes soient les mêmes pour les deux cubiques.

Cela posé, il est clair que u et u' devront être liés par une relation linéaire

$$u' = su + k,$$

et que cette relation devra être telle que u' augmente d'une période quand u augmente d'une période et réciproquement.

Cela peut arriver de trois manières :

1° Si $s = 1$, les périodes étant d'ailleurs quelconques. Je dirai alors que la transformation est *propre*.

2° Si $s = -1$, les périodes étant d'ailleurs quelconques. Je dirai alors que c'est une *transformation impropre générale*.

3° Si s et les périodes ont des valeurs convenables. Je dirai alors que c'est une *transformation impropre spéciale*.

Il y en a de trois sortes :

1° $s = \pm i$, le rapport des périodes $= i$ (transf. quaternaires);

2° $s = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$, le rapport des périodes $= s$ (transf. ternaires);

3° $s = e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$, le rapport des périodes $= s$ (transf. sénaires).

Pour que la transformation soit linéaire, il faut et il suffit que trois points en ligne droite avant la transformation restent en ligne droite après la transformation; c'est-à-dire que si

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

on devra avoir

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 = 0,$$

$$u'_1 = su_1 + k, \qquad u'_2 = su_2 + k, \qquad u'_3 = su_3 + k.$$

ce qui veut dire que k doit être un tiers de période.

Les plus intéressantes de ces transformations sont celles qui transforment C en elle-même. Quelles sont les conditions pour que ces transformations soient purement rationnelles, c'est-à-dire aient leurs coefficients rationnels?

Je ne reviendrai pas sur les transformations propres. Commençons par les transformations impropres générales. La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation $(u, -u+k)$ soit rationnelle, c'est-à-dire pour que les coordonnées du point $-u+k$ soient des fonctions rationnelles de celles du point u, c'est évidemment que le point d'argument $-k$ soit rationnel, puisque les trois points u, $-u+k$ et $-k$ sont en ligne droite.

Soit maintenant $s = i$ et supposons d'abord la transformation linéaire; nous pourrons supposer $k = 0$. Quelle est la condition pour que la transformation (u, iu) soit rationnelle?

Les points doubles de cette transformation seront donnés par l'équation

$$u = iu + m\omega + n\omega',$$

ω et ω' étant les périodes; mais le rapport de ces périodes étant égal

à i, on peut écrire

$$u = iu + \omega(m + ni) \qquad (m \text{ et } n \text{ entiers}),$$

qui admet deux solutions distinctes

$$u = 0, \qquad u = \frac{\omega}{2}(1 + i).$$

Ces deux points doivent donc former un couple rationnel si la transformation est rationnelle. Mais le premier étant un point d'inflexion, tandis qu'il n'en est pas de même de l'autre, les deux points devront être l'un et l'autre rationnels. Si d'ailleurs le second de ces points est rationnel, le premier l'est nécessairement, puisque la tangente au second va passer par le premier.

Soient alors A le point $u = 0$, B le point $\frac{\omega}{2}(1 + i)$, C et D les points $\frac{\omega}{2}$ et $i\frac{\omega}{2}$ (de telle façon que les trois points B, C, D soient en ligne droite). Soit M un point quelconque u et M′ son transformé iu. Le rapport anharmonique des quatre droites BA, BC, BM, BM′, qui est constant, devrait être rationnel si la transformation était rationnelle. Or il est égal à i; donc la transformation ne peut être rationnelle.

Il n'y a donc pas de transformation quaternaire rationnelle et linéaire d'une cubique en elle-même. Passons aux transformations ternaires.

Soit (u, su) une transformation ternaire linéaire; les périodes étant ω et $s\omega$, les points doubles de la transformation seront donnés par l'équation

$$u = su + \omega(m + ns),$$

qui admet trois solutions distinctes

$$u = 0, \qquad u = \frac{\omega}{3}(2 + s), \qquad u = \frac{\omega}{3}(1 + 2s).$$

Ces trois points doubles sont en ligne droite et sont des points d'inflexion. Ils doivent former un groupe rationnel si la transformation est rationnelle, de sorte que la droite qui les joint est rationnelle. Soit D cette droite.

Soient M un point u quelconque, M′ et M″ ses deux transformés successifs su et s^2u. Ces trois points sont en ligne droite, et toutes les droites MM′M″ vont concourir en un même point A (pôle de la droite D par rapport à la cubique) qui doit être rationnel si la transformation est rationnelle.

Cela posé, le rapport anharmonique du point A, des points M, M′ et de l'intersection de MM′ avec D, rapport qui est constant, devrait être rationnel si la transformation était rationnelle. Or il est égal à s.

Il ne peut donc y avoir de transformations ternaires linéaires et rationnelles d'une cubique en elle-même (ni par conséquent de transformations sénaires).

En résumé, *une cubique ne peut admettre une transformation en elle-même qui soit, à la fois, impropre spéciale, linéaire et rationnelle.*

A vrai dire, la démonstration qui précède est encore incomplète, puisqu'elle ne s'applique qu'au cas de $k = 0$ et que, pour qu'une transformation soit linéaire, il suffit que k soit un tiers de période. Mais nous allons étendre le résultat au cas de k quelconque, c'est-à-dire non seulement aux transformations linéaires où k est un tiers de période sans être nul, mais encore aux transformations birationnelles quelconques.

Soit $(u, iu + k)$ une transformation quaternaire de C en elle-même. Les points doubles seront

$$\frac{k}{2}(1+i), \qquad \frac{k+\omega}{2}(1+i),$$

et formeront un couple rationnel, d'où il résulte que le point

$$-\left(k+\frac{\omega}{2}\right)(1+i),$$

qui est en ligne droite avec les deux premiers, sera lui-même rationnel. J'appelle ces trois points A, A′ et B.

La transformation proposée *doublée* est la transformation impropre

générale $(u, -u+k+ki)$, et, si elle est rationnelle, le point

$$-k(1+i),$$

que j'appelle C, sera lui même rationnel.

Soit M un point quelconque u et M' son transformé $iu+k$. La droite MB coupera la cubique en un troisième point M_1, et la droite M'B coupera la cubique en un troisième point M'_1 qui sera le transformé de M_1.

Les droites MB et M'B formeront donc un faisceau homographique dont les droites doubles seront la droite AA'B, qui est rationnelle, et la droite BD, qui joint le point B aux deux points

$$\frac{k}{2}(1+i)+\frac{\omega}{2}, \qquad \frac{k}{2}(1+i)+\frac{\omega i}{2},$$

qui sont transformés l'un de l'autre et forment un couple rationnel. Cette droite devrait également être rationnelle.

Le rapport anharmonique constant des quatre droites BA, BD, BM, BM' devrait être rationnel si la transformation était rationnelle. Or, il est égal à i; donc notre transformation ne saurait être rationnelle.

Considérons maintenant une transformation ternaire $(u, su+k)$; les trois points doubles de cette transformation auront pour arguments

$$\frac{k}{1-s}, \quad \frac{k}{1-s}+\frac{\omega}{3}(2+s), \quad \frac{k}{1-s}+\frac{\omega}{3}(2s+1).$$

La somme de leurs arguments sera, à une période près, $k(2+s)$, et ils formeront un triplet rationnel. Soient A, A', A'' ces trois points.

Par ce triplet rationnel, je pourrai faire passer une conique rationnelle que j'appelle K et qui coupera la cubique suivant un autre triplet rationnel que j'appelle T; la somme des arguments de ce triplet sera $-k(2+s)$.

Soient ensuite M le point u, M' et M'' ses deux transformés successifs dont les arguments sont

$$su+k, \quad s^2u+k(1+s).$$

La somme de ces trois arguments étant $k(2+s)$, les trois points M, M′, M″ et le triplet T seront sur une même conique que j'appelle H.

Soit D l'intersection de H et de K.

On voit tout de suite que par un point de la cubique passe une seule des coniques H, d'où l'on conclut que ces coniques passent par quatre points fixes; trois de ces points forment le triplet T; le quatrième, que j'appelle E, est en dehors de la cubique. Étant unique, il est rationnel.

Le rapport anharmonique des quatre points E, D, M, M′ sur la conique H est constant. Si la transformation était rationnelle, il devrait être rationnel. Or il est égal à s.

Il ne peut donc y avoir de transformations rationnelles ternaires, ni par conséquent sénaires.

En résumé, *une transformation d'une cubique en elle-même ne peut pas être à la fois impropre spéciale et rationnelle.*

Si une transformation birationnelle T transforme une cubique C en une autre cubique C'_1, nous appellerons u l'argument elliptique d'un point M de C et u' l'argument de son transformé M′ sur C′. Nous pourrons toujours supposer

$$du' = du,$$

car si du est une différentielle abélienne de première espèce pour C, c'en sera une aussi pour C′. Donc u' et u ne différeront que par une constante k, et l'on aura

$$u' = u + k.$$

Nous supposerons toujours u' défini de telle façon que la somme des arguments de trois points en ligne droite soit nulle, ce qui définit k à $\frac{1}{3}$ de période près.

Supposons que T ait ses coefficients rationnels, et qu'une seconde transformation T_1 à coefficients rationnels change C en une autre cubique C'_1. Soit M_1 le transformé de M sur C'_1 et u'_1 son argument elliptique sur C'_1. Soit

$$u'_1 = u + k_1.$$

Les deux cubiques C et C'_1 appartiennent à la même classe; dans quels cas appartiendront-ils à la même sous-classe, c'est-à-dire dans

quels cas pourra-t-on passer de C'_1 à C' par une transformation linéaire L à coefficients rationnels?

Soit N le transformé de M'_1 par L; N sera sur C', soit v l'argument de N sur C'. Je ne puis plus, cette fois, affirmer que $dv = du'_1 = du$, parce que les arguments elliptiques des points de C' ont déjà été définis et que j'ai, par conséquent, déjà disposé des arbitraires que comporte cette définition.

La transformation

$$T^{-1}T_1 L$$

est purement rationnelle; elle change C' en elle-même et M' en N; *d'après ce que nous venons de voir, elle ne peut être impropre spéciale*. Elle sera donc propre ou impropre générale, c'est-à-dire qu'on aura

$$v = u' + \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad v = -u' + \varepsilon,$$

ε étant une constante.

Quelles sont les valeurs que peut prendre ε?

1° Pour les transformations propres, ces valeurs sont

$$\varepsilon = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha).$$

2° Pour les transformations impropres générales, elles sont

$$\varepsilon = -(3n+1)\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha) - k$$

(car le point $-\varepsilon$ doit être rationnel sur C' et, par conséquent, le point $-\varepsilon - k$ sur C).

Considérons trois points sur C; soit Σu la somme de leurs arguments; considérons leurs transformés par T sur C' dont la somme des arguments sera $\Sigma u'$, leurs transformées par T_1 sur C'_1 dont la somme des arguments sera $\Sigma u'_1$; et enfin les transformés de ce dernier triplet par L; ces transformés formeront un triplet sur C', et la somme des arguments sera Σv.

La transformation L étant linéaire, si l'un de ces deux derniers triplets est en ligne droite, il doit en être de même de l'autre; c'est-à-dire que les deux sommes $\Sigma u'_1$ et Σv doivent s'annuler en même temps.

Or on a

$$\Sigma u'_1 = \Sigma u' + 3k_1 - 3k$$

et, de plus,

$$\Sigma v = \Sigma u' + 3\varepsilon$$

si L est propre, et

$$\Sigma v = -\Sigma u' + 3\varepsilon$$

si L est impropre.

On aura donc, dans le premier cas,

$$\Sigma v - \Sigma u'_1 = 3\varepsilon - 3k_1 + 3k$$

et, dans le second cas,

$$\Sigma v + \Sigma u'_1 = +3\varepsilon + 3k_1 - 3k.$$

Donc on devra avoir, dans le premier cas,

$$(4)\quad k_1 - k = 3n\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) + p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha)$$

et, dans le second,

$$(4\,bis)\quad \left\{ \begin{aligned} k_1 - 2k = &+(3n+1)\alpha + p_1(\alpha_1 - \alpha) \\ &+ p_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \end{aligned} \right.$$

le tout à $\frac{1}{3}$ de période près.

La première de ces relations n'est autre que la relation (4) déjà discutée.

L'équation (3) nous apprend que k et k_1 doivent être tous deux de la forme

$$\begin{aligned} k &= 3n'\alpha + p'_1(\alpha_1 - \alpha) + p'_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p_q(\alpha_q - \alpha), \\ k_1 &= 3n''\alpha + p''_1(\alpha_1 - \alpha) + p''_2(\alpha_2 - \alpha) + \ldots + p''_q(\alpha_q - \alpha), \end{aligned}$$

chacun des nombres n', n'', p', p'' étant le $\frac{1}{3}$ d'un entier. Nous avons vu déjà que la relation (4') a lieu si les différences

$$n' - n'', \quad p'_1 - p''_1, \quad \ldots, \quad p'_q - p''_q$$

sont des nombres entiers, sauf pour les différences $p'_s - p''_s$ qui correspondent à un entier m_s non divisible par 3.

Dans quel cas maintenant la relation (4 *bis*) aura-t-elle lieu? Il faut que les différences

$$n'' - 2n' - \tfrac{1}{3}, \quad p''_1 - 2p'_1, \quad p''_2 - 2p'_2, \quad \ldots, \quad p''_q - 2p'_q$$

soient des nombres entiers.

Remarquons que nous pouvons toujours supposer $\alpha = 0$; si nous prenons, en effet,

$$k = -\alpha \qquad \left(n' = \frac{-1}{3}, \; p'_s = 0\right),$$

et alors au point α de C correspondra le point $\alpha + k = 0$ de C'. En d'autres termes, si une cubique a un point rationnel, il y aura une cubique équivalente qui aura un point d'inflexion rationnel.

Supposons donc $\alpha = 0$, ce qui nous dispense de considérer les valeurs des nombres n' et n''. Le nombre p_h peut alors prendre deux valeurs distinctes 0 et $\frac{1}{3}$; les valeurs 1 et 0 par exemple ne sont pas distinctes, parce que leur différence est un entier; les valeurs $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ ne sont pas distinctes non plus, parce que la différence

$$p'' - 2p' = \tfrac{2}{3} - 2\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

est un entier.

Il résulte de là que si α est nul et qu'il y ait q' entiers m_s non divisibles par 3, *la classe comprendra $2^{q-q'}$ sous-classes.*

Il nous reste à examiner le cas où la cubique C n'admet pas de point rationnel.

La cubique C n'aura pas alors de transformation rationnelle impropre en elle-même, mais elle pourra admettre des transformations rationnelles propres en elle-même.

Ces transformations $(u, u + k)$ seront comprises dans une formule

$$(5) \qquad k = p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_q\beta_q,$$

où les β sont des constantes données et les p des entiers arbitraires.

Si C est équivalente à une autre cubique C', de telle manière que le

point u ait pour transformé sur C′ le point $u+k'$, c'est qu'il existe sur C une infinité de triplets rationnels dont la somme des arguments est $-3k'$. Soit T un de ces triplets.

Coupons ensuite C par une droite rationnelle quelconque; les trois points d'intersection u_1, u_2, u_3 formeront un triplet rationnel.

Par T, par u_1 et par un point rationnel quelconque A du plan, je fais passer une conique K_1; soit de même K_2 la conique Tu_2A et K_3 la conique Tu_3A. Chacune des coniques K_1, K_2, K_3 ne sera pas rationnelle, mais leur *ensemble* sera rationnel, de telle façon que le produit des premiers membres de leurs équations sera un polynome à coefficients rationnels.

K_1 coupera C en deux autres points v_1 et v'_1, K_2 et K_3 couperont C en deux autres couples de points v_2 et v'_2, v_3 et v'_3. Ces six points v et v' formeront un groupe rationnel, et l'ensemble des trois droites $v_1v'_1$, $v_2v'_2$, $v_3v'_3$ formera une cubique rationnelle, bien que chacune de ces trois droites, prise séparément, ne soit pas rationnelle.

La droite $v_1v'_1$ coupe C en un troisième point u_1-3k'. La droite $v_2v'_2$ coupe C au point u_2-3k'; la droite $v_3v'_3$ coupe C au point u_3-3k'. Ces trois points forment un triplet rationnel.

Si nous joignons les trois points d'un triplet rationnel aux trois points d'un autre triplet rationnel, on obtient neuf droites qui coupent C en neuf points formant un groupe rationnel. Si nous opérons ainsi sur les deux triplets rationnels

$$(u_1, u_2, u_3), \quad (u_1-3k', u_2-3k', u_3-3k'),$$

six de ces neuf points se confondent deux à deux, de sorte que notre groupe de neuf points se décompose en un triplet simple rationnel et un triplet double rationnel $(u_1+3k', u_2+3k', u_3+3k')$. (Attendu qu'un polynome à coefficients rationnels du neuvième degré, qui a trois racines doubles et trois racines simples, est le produit d'un polynome à coefficients rationnels du troisième degré et du carré d'un autre polynome à coefficients rationnels du troisième degré.)

Cela posé, on peut, comme au § V, construire une transformation Cremona rationnelle, dont les points-bases seront u_1+3k', u_2+3k', u_3+3k', ceux de la transformation inverse étant u_1-3k', u_2-3k', u_3-3k', qui transforme C en elle-même.

On devra donc avoir, d'après la formule (5),

$$3k = p_1\beta_1 + \ldots + p_q\beta_q.$$

Les nombres entiers $p_1, \ldots, p_q$ peuvent-ils prendre des valeurs quelconques? Cela n'est pas certain. Tout ce que je puis affirmer, c'est que, si ces nombres peuvent prendre les valeurs p'_h et les valeurs p''_h, ils pourront prendre également les valeurs $p'_h + p''_h$, puisque l'existence de deux triplets dont la somme des arguments est $-3k'$ et $-3k''$ entraîne celle d'un autre triplet dont la somme des arguments est $-3k' - 3k''$.

On pourra donc donner aux nombres p toutes les valeurs compatibles avec un certain nombre de relations linéaires à coefficients entiers.

Il est clair qu'on peut remplacer les β par des combinaisons linéaires des β à coefficients entiers, le déterminant de ces coefficients étant égal à 1. On pourra alors choisir ces combinaisons linéaires de telle façon que quelques-uns des nombres p pourront prendre des valeurs quelconques, tandis que les autres devront être nuls. Si l'une des quantités β_s est égale à une période divisée par m_s, sans que l'entier m_s soit divisible par 3, on pourra donner à p_s une valeur quelconque, les autres p étant nuls. La condition nécessaire et suffisante pour que deux cubiques équivalentes (correspondant à deux systèmes p'_h et p''_h des entiers p) appartiennent à une même sous-classe, c'est que

$$p'_n \equiv p''_h \quad (\text{mod } 3),$$

sauf pour les entiers p_s qui correspondent à des quantités β_s égales à une période divisée par m_s, l'entier m_s n'étant pas divisible par 3.

Le nombre des sous-classes est alors une puissance de 3.

Si une cubique a des points rationnels compris dans la formule

$$(6) \qquad \alpha + 3n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s),$$

nous venons de voir que, pour les triplets rationnels, la somme des

arguments est donnée par la formule

$$(7) \qquad 3n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s).$$

J'ajoute que pour les couples rationnels la somme des arguments sera donnée par la formule

$$(8) \qquad 2\alpha + 3n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s),$$

car la droite qui joint les deux points d'un couple rationnel doit couper la cubique en un troisième point qui est rationnel, et, réciproquement, toute droite rationnelle passant par un point rationnel va passer par un couple rationnel.

Je dis plus généralement que la somme des arguments d'un groupe rationnel de K points est donnée par la formule (6), (7) ou (8) suivant que K est congru à 1, 0 ou 2 suivant le module 3.

En effet, si par exemple $K = 3j + 2$, je puis, d'une infinité de manières, trouver j triplets rationnels satisfaisant à la formule (7) et un couple rationnel satisfaisant à la formule (8); l'ensemble de ces points formera un groupe rationnel de K points satisfaisant à la formule (8).

Réciproquement, si l'on a un groupe rationnel de

$$K = 3j + \varepsilon \qquad (\varepsilon = 1,\ 2 \text{ ou } 0),$$

je dis que la somme des arguments sera donnée par la formule

$$\varepsilon\alpha + 3n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s).$$

En effet par ces K points je puis faire passer une courbe rationnelle d'ordre $j+1$; elle coupera en outre la cubique suivant $1-\varepsilon$ points, qui formeront un groupe rationnel dont la somme des arguments devra être de la forme

$$-\varepsilon\alpha - 3n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s).$$

Or la somme des arguments des $3j + 1 = K + (1-\varepsilon)$ points d'intersection doit être nulle.

VII. — Extension du domaine de rationalité.

On peut évidemment répéter les mêmes raisonnements en considérant comme rationnelles, non seulement les quantités rationnelles proprement dites, mais toutes les quantités rationnelles d'un corps algébrique déterminé; ou en d'autres termes en *adjoignant* au domaine de rationalité les nombres algébriques qui forment la base de ce corps algébrique.

Rien ne sera changé à nos résultats, sauf ce qui suppose la *réalité* des nombres rationnels. C'est ainsi qu'on ne pourra plus appliquer ce que j'ai dit au paragraphe III sur les deux branches que peut avoir une cubique, sur la distribution des points rationnels sur ces deux branches et les conséquences qui en résultent pour la classification des cubiques.

D'autre part, nous ne pourrons plus toujours affirmer qu'une cubique ne peut admettre de transformation rationnelle impropre spéciale en elle-même. Mais ce ne sont là que des points de détail, et les résultats essentiels vont subsister.

L'importance de ces résultats se trouve accrue. Par exemple, nos théorèmes, sous leur forme primitive, n'avaient pas d'application à la cubique

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0,$$

puisqu'elle n'a que trois points rationnels que l'on aperçoit immédiatement. Après l'adjonction d'un certain corps algébrique au domaine de rationalité, il n'en sera plus de même, puisque cette cubique pourra avoir une infinité de points rationnels appartenant à ce corps.

Remarquons que deux cubiques, non équivalentes avant l'adjonction d'un ou plusieurs nombres algébriques, pourront devenir équivalentes après cette adjonction. En revanche, si elles sont équivalentes avant l'adjonction, elles le seront *a fortiori* après l'adjonction.

D'autre part, il peut se faire que deux cubiques équivalentes n'appartiennent pas à la même sous-classe avant l'adjonction et soient de la même sous-classe après cette adjonction.

Dans tous les cas, ces considérations pourront servir de base à de nouveaux critères relatifs à la classification des cubiques.

Soit par exemple k une constante quelconque, et considérons la transformation $(u, u+k)$ de la cubique en elle-même. Cette transformation ne sera pas en général rationnelle, mais elle le deviendra après adjonction d'un corps algébrique convenablement choisi. Ce corps dépendra de la cubique choisie et de la quantité k. Mais il sera le même pour une même quantité k et pour toutes les cubiques d'une même classe.

C'est donc un nouvel élément de la classification des cubiques.

VIII. — Cubiques dérivées.

Supposons d'abord qu'une cubique ait trois points d'inflexion en ligne droite rationnels.

Son équation pourra se mettre sous la forme

$$\Lambda^3 = XYZ \tag{1}$$

Λ, X, Y et Z étant des polynomes du premier degré en x, y, z à coefficients entiers. Supposons que la cubique admette un point rationnel outre ses trois points d'inflexion, et soient Λ_0, X_0, Y_0, Z_0 les résultats des substitutions dans X, Y, Z des coordonnées x_0, y_0, z_0 de ce point. Nous pourrons toujours supposer que ces coordonnées sont des nombres entiers, premiers entre eux; de sorte que $\Lambda_0, X_0, Y_0; Z_0$ seront aussi des entiers.

Soit p un nombre qui divise à la fois X_0 et Y_0; il devra diviser aussi Λ_0. Comme les nombres x_0, y_0, z_0 sont premiers entre eux, le nombre p devra diviser le déterminant Δ'' des trois fonctions linéaires Λ, X, Y; car il divise évidemment $\Delta'' x_0$, $\Delta'' y_0$, et $\Delta'' z_0$.

Donc X_0 et Y_0 ne pourront avoir d'autres facteurs communs que ceux qui divisent Δ''. De même Y_0 et Z_0 ne pourront avoir d'autres facteurs communs que ceux qui divisent Δ, déterminant de Λ, Y, Z; tandis que X_0 et Z_0 ne pourront avoir d'autres facteurs communs que ceux qui divisent Δ', déterminant de Λ, X, Z.

Soit δ le plus grand commun diviseur de X_0, Y_0, Z_0; α celui de $\frac{Y_0}{\delta}$

et $\frac{Z_0}{\delta}$; β celui de $\frac{X_0}{\delta}$ et $\frac{Z_0}{\delta}$; γ celui de $\frac{X_0}{\delta}$ et $\frac{Y_0}{\delta}$; α, β et γ seront premiers entre eux deux à deux. X_0 sera divisible par $\beta\gamma\delta$, Y_0 par $\alpha\gamma\delta$, Z_0 par $\alpha\beta\delta$. Soit

$$X_0 = a\beta\gamma\delta, \qquad Y_0 = b\alpha\gamma\delta, \qquad Z_0 = c\alpha\beta\delta.$$

On voit que $b\alpha$ est premier avec $a\beta$, $c\beta$ avec $b\gamma$, $a\gamma$ avec $c\alpha$; et par conséquent les nombres a, b, c sont premiers deux à deux; a premier avec α, b avec β, c avec γ.

Il vient alors

$$A_0^3 = abc(\alpha\beta\gamma)^2\delta^3.$$

Soient μ_1 le plus grand commun diviseur de a et $\alpha\beta\gamma$; μ_2 celui de b et $\alpha\beta\gamma$; μ^3 celui de c et $\alpha\beta\gamma$. Comme a, b, c sont premiers entre eux deux à deux, il en sera de même de μ_1, μ_2, μ_3 d'une part; de $\frac{a}{\mu_1}$, $\frac{b}{\mu_2}$, $\frac{c}{\mu_3}$ d'autre part. Il en résulte d'abord que $\alpha\beta\gamma$ est divisible par $\mu_1\mu_2\mu_3$, de sorte qu'on peut écrire

$$A_3^0 = \delta^3(\mu_1\mu_2\mu_3)^3\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)^2\frac{a}{\mu_1}\,\frac{b}{\mu_2}\,\frac{c}{\mu_3}.$$

Le produit

$$\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}\right)^2\frac{a}{\mu_1}\,\frac{b}{\mu_2}\,\frac{c}{\mu_3}$$

est donc un cube parfait, et, comme les facteurs de ce produit sont premiers deux à deux, chacun des facteurs

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad \frac{a}{\mu_1}, \quad \frac{b}{\mu_2}, \quad \frac{c}{\mu_3}$$

devra être un cube parfait.

Soient

$$\omega^3, \quad \xi_0^3, \quad \eta_0^3, \quad \zeta_0^3$$

ces quatre cubes; il viendra

$$X_0 = \xi_0^3\mu_1\beta\gamma\delta, \qquad Y_0 = \eta_0^3\mu_2\alpha\gamma\delta, \qquad Z_0 = \zeta_0^3\mu_3\alpha\beta\delta,$$
$$A_0 = \delta\mu_1\mu_2\mu_3\,\omega\,\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0,$$

ce que je puis écrire

$$X_0 = h_1 \xi_0^3, \qquad Y_0 = h_2 \eta_0^3, \qquad Z_0 = h_3 \zeta_0^3, \qquad A_0 = k \xi_0 \eta_0 \zeta_0,$$

les coefficients h et k étant des entiers. Remarquons que ces entiers sont limités.

En effet α, β, γ doivent diviser respectivement Δ, Δ', Δ'', qui sont des entiers donnés; δ doit diviser ces trois déterminants; μ_1, μ_2, μ_3 doivent diviser $\alpha\beta\gamma$.

Donc tous ces entiers sont limités ainsi que les entiers

$$\omega, \quad h_1, \quad h_2, \quad h_3, \quad k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On ne peut donc faire au sujet de ces coefficients qu'un nombre fini d'hypothèses.

Posons alors

$$X = h_1 \xi^3, \qquad Y = h_2 \eta^3, \qquad Z = h_3 \zeta^3, \qquad A = k \xi\eta\zeta$$

et éliminons x, y, z entre ces quatre équations; nous aurons entre ξ^3, η^3, ζ^3, $\xi\eta\zeta$ une relation linéaire et homogène à coefficients entiers. C'est l'équation d'une cubique rationnelle C' sur laquelle doit se trouver le point ξ, η, ζ. Je dirai que C' est une cubique *dérivée* de C.

D'après ce qui précède, C n'aura qu'un nombre fini de dérivées puisqu'on ne peut faire sur les entiers h et k qu'un nombre fini d'hypothèses.

Le point ξ_0, η_0, ξ_0 sera un point rationnel de C'.

On voit ainsi qu'à chaque point rationnel de C correspond un point rationnel d'une de ses dérivées. Si donc C a une infinité de points rationnels, il en sera de même d'une au moins de ses dérivées.

Voyons quelle relation il y a entre les deux cubiques C et C'.

A chaque point de C' correspond un seul point de C; à chaque point de C correspondront trois valeurs des rapports $\frac{\zeta}{\xi}$, $\frac{\eta}{\xi}$ et par conséquent trois points de C'. Ces trois points auront pour coordonnées

$$\xi, \eta, \zeta; \quad \alpha\xi, \alpha^2\eta, \zeta; \quad \alpha^2\xi, \alpha\eta, \zeta,$$

α étant une racine cubique de l'unité. Soient M_1, M_2, M_3 ces trois points; u_1, u_2, u_3 leurs arguments.

Considérons en particulier les trois points d'inflexion de C qui sont donnés par les équations

$$X = A = 0, \qquad Y = A = 0, \qquad Z = A = 0$$

qui ont pour arguments $0, \frac{\omega}{3}, \frac{2\omega}{3}$, et que j'appelle J_1, J_2, J_3.

A ces trois points correspondront sur C′ les neuf points d'inflexion situés sur les trois droites $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ et qui auront pour arguments

$$\frac{m\omega_1 + n\omega'_1}{3},$$

où ω_1 et ω'_1 sont les périodes relatives à C′, m et n des entiers.

La courbe C′ n'est pas altérée quand on change ξ, η, ζ en $\alpha\xi, \alpha^2\eta, \zeta$. Ce ne saurait être là une transformation impropre; car une transformation impropre a des points doubles sur la cubique elle-même et les trois points doubles de cette transformation sont $\xi = \eta = 0$, $\xi = \zeta = 0$, $\eta = \zeta = 0$ et ne sont pas sur la cubique. C'est donc une transformation de la forme $(u, u + k)$, et comme, après trois transformations, on revient au point primitif, il faut que k soit $\frac{1}{3}$ de période.

Si u est l'argument d'un point de C′ et v l'argument du point correspondant de C, v sera une fonction uniforme de u, car, si u décrit un petit contour dans son plan, v revient à sa valeur primitive. De même, si v décrit un petit contour dans son plan, les trois valeurs de ξ, η, ζ et, par conséquent, les trois valeurs de u ne peuvent s'échanger, puisque les points doubles $\xi = \eta = 0$, $\xi = \zeta = 0$, $\eta = \zeta = 0$ (pour lesquels deux des trois systèmes de valeurs de ξ, η, ζ se confondraient) n'appartiennent pas à la cubique C′. Donc u est fonction uniforme de v, et, comme v est fini quand u est fini et réciproquement, il doit y avoir entre u et v une rélation linéaire.

Quand u augmente de k ou d'une période, v doit augmenter d'une période et, réciproquement, quand v augmente d'une période, u doit augmenter de k ou d'une période.

Soient o, $\frac{\omega'_1}{3}$, $\frac{2\omega'_1}{3}$ les arguments des trois points d'inflexion $\xi = 0$; $\frac{\omega_1}{3}$, $\frac{\omega_1 + \omega'_1}{3}$, $\frac{\omega_1 + 2\omega'_1}{3}$ ceux des trois points d'inflexion $\eta = 0$; $\frac{2\omega_1}{3}$, $\frac{2\omega_1 + \omega'_1}{3}$, $\frac{2\omega_1 + 2\omega'_1}{3}$ ceux des trois points d'inflexion $\zeta = 0$. Je vois tout de suite que

$$k = \frac{\omega'_1}{3},$$

car les trois points $\xi = 0$ se transforment les uns dans les autres par la transformation $(u, u + k)$. Soit

$$v = au + b.$$

D'après ce que nous venons de voir $a\omega_1$ et $\frac{a\omega'_1}{3}$ doivent être des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ω et ω', et réciproquement, de sorte qu'on aura

$$a\omega_1 = m\omega + n\omega',$$

$$a\frac{\omega'_1}{3} = m_1\omega + n_1\omega',$$

m, n, m_1, n_1 étant des entiers tels que $mn_1 - nm_1 = 1$.

Nous pouvons toujours supposer $a = 1$, car les périodes de C (ou de C′) ne sont définies qu'à un facteur constant près.

Pour $u = 0, \frac{\omega_1}{3}, \frac{2\omega'_1}{3}$, nous devons avoir

$$v = 0, \qquad \text{à une période près.}$$

Pour $u = \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega'_1}{3}, \frac{\omega_1 + 2\omega'_1}{3}$, nous devons avoir

$$v = \frac{\omega}{3}, \qquad \text{à une période près.}$$

Pour $u = \frac{2\omega_1}{3}, \frac{\omega_1 + \omega'_1}{3}, \frac{2\omega_1 + 2\omega'_1}{3}$, nous devons avoir

$$v = \frac{2\omega}{3}, \qquad \text{à une période près.}$$

Nous en concluons d'abord que b doit être égal à une période et, par conséquent, que nous pouvons supposer cette constante nulle sans restreindre la généralité, ensuite que $\frac{\omega}{3}$ est égal à $\frac{\omega_1}{3}$, à une période de C près, ou, ce qui revient au même, que $\frac{\omega}{3}$ est le tiers d'une période de C'. Cette période, nous pouvons toujours l'appeler ω_1, de sorte que nous aurons $\omega = \omega_1$.

Enfin $k = \frac{\omega'_1}{3}$ doit être une période de C formant un système primitif avec ω; je l'appelle ω'; on a donc finalement

$$v = u, \qquad \omega = \omega_1, \qquad \omega' = \frac{\omega'_1}{3}.$$

De sorte que les fonctions elliptiques relatives à C' se déduisent de celles qui sont relatives à C par une transformation du troisième ordre.

Tous ces résultats ne s'appliquent qu'au cas où trois points d'inflexion de C sont rationnels. Cherchons à les généraliser.

Nous n'avons pour cela qu'à adjoindre au domaine de rationalité les coordonnées de trois points d'inflexion en ligne droite. L'équation de la cubique prendra la forme

$$(1\ bis) \qquad XYZ = A^3,$$

où X, Y, Z, A sont des polynomes du premier degré dont les coefficients sont des entiers du corps algébrique constitué par cette adjonction.

Considérons un point rationnel de notre cubique (soit rationnel proprement dit, soit devenu rationnel par l'adjonction). Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce point; nous pourrons supposer que ce sont des entiers du corps algébrique.

Mais ici une première difficulté se présente : avons-nous le droit de supposer que ces entiers algébriques sont premiers entre eux? Il va sans dire que tous ces mots d'*entiers algébriques premiers entre eux*, de *divisibilité*, etc., doivent s'entendre dans le sens de la théorie des idéaux.

Si alors les nombres x_0, y_0, z_0 ont pour diviseur commun un nombre algébrique existant, c'est-à-dire un idéal principal, on pourra faire disparaître ce facteur commun sans altérer les rapports de ces trois quantités. Mais si x_0, y_0, z_0 ont pour diviseur commun un idéal non principal, on ne pourra pas faire la division, parce que les quotients ne seraient plus des nombres algébriques existants.

Soient alors J le plus grand commun diviseur de x_0, y_0, z_0 et J' un idéal de la même classe. Il existe toujours deux entiers algébriques existants E et E' tels que

$$EJ = E'J'.$$

Alors x_0E, y_0E, z_0E auront pour plus grand commun diviseur $EJ = E'J'$ et

$$\frac{x_0 E}{E'}, \quad \frac{y_0 E}{E'}, \quad \frac{z_0 E}{E'}$$

seront trois entiers algébriques existants dont le plus grand commun diviseur sera J'.

On peut donc toujours remplacer les trois entiers algébriques dont le plus grand commun diviseur était J par trois autres dont le plus grand commun diviseur sera J'.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de classes d'idéaux, on peut choisir un nombre fini d'idéaux J' que j'appellerai *idéaux types*, de façon qu'il y en ait un, et un seul, dans chaque classe.

On ne peut pas toujours supposer que x_0, y_0, z_0 sont premiers entre eux, mais on peut supposer que leur plus grand commun diviseur est un idéal type.

J'ajoute que, si x_0, y_0, z_0 sont des *entiers rationnels ordinaires*, on peut supposer qu'ils sont premiers entre eux, car le plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs entiers rationnels ordinaires est un entier rationnel ordinaire.

Soient A_0, X_0, Y_0, Z_0 le résultat de la substitution de x_0, y_0, z_0 dans A, X, Y, Z.

Si j'appelle encore Δ, Δ', Δ'' les trois déterminants des quatre fonctions linéaires A, X, Y, Z, le plus grand commun diviseur de X_0 et Y_0 divisera Δ''J, J étant le plus grand commun diviseur de x_0, y_0, z_0; d'où il suit encore que nous ne pouvons faire, au sujet de ce plus grand

commun diviseur, qu'un nombre fini d'hypothèses; il en sera de même pour le plus grand commun diviseur de X_0 et Z_0 ou de Y_0 et Z_0.

Nous ne pourrons donc faire qu'un nombre fini d'hypothèses sur les plus grands communs diviseurs de X_0, Y_0, Z_0 (que j'appelle δ), de $\frac{Y_0}{\delta}$ et $\frac{Z_0}{\delta}$, de $\frac{X_0}{\delta}$ et $\frac{Z_0}{\delta}$, de $\frac{X_0}{\delta}$ et $\frac{Y_0}{\delta}$ (que j'appelle α, β, γ). Ces diviseurs α, β, γ, δ sont des idéaux du corps algébrique considéré.

J'aurai encore

$$X_0 = a\beta\gamma\delta, \qquad Y_0 = b\alpha\gamma\delta, \qquad Z_0 = c\alpha\beta\delta,$$

a, b, c étant des idéaux du corps. Les idéaux a, b, c sont premiers entre eux deux à deux; a premier avec α, b avec β, c avec γ, et l'on a

$$A_0^3 = abc(\alpha\beta\gamma)^2\delta^3.$$

Il suit de cette égalité que, si l'on définit μ_1, μ_2, μ_3 comme plus haut, les expressions

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1\mu_2\mu_3}, \quad \frac{a}{\mu_1}, \quad \frac{b}{\mu_2}, \quad \frac{c}{\mu_3}$$

seront des cubes parfaits; mais je ne veux pas dire par là que ce sont les cubes d'entiers algébriques existants, mais les cubes d'idéaux du corps.

Soient alors λ_1, λ_2, λ_3 les idéaux types appartenant aux mêmes classes que

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\mu_1}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{\mu_2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{c}{\mu_3}};$$

comme le nombre des classes est fini, on ne peut faire, au sujet des idéaux λ, qu'un nombre fini d'hypothèses.

Nous pourrons alors poser

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\mu_1}} = \lambda_1\xi_0, \qquad \sqrt[3]{\frac{b}{\mu_2}} = \lambda_2\eta_0, \qquad \sqrt[3]{\frac{c}{\mu_3}} = \lambda_3\zeta_0,$$

et ξ_0, η_0, ζ_0 seront des nombres *rationnels* (qui ne seront peut-être pas entiers) du corps algébrique considéré.

Il vient alors

$$X_0 = h_1 \xi_0^3, \qquad Y_0 = h_2 \eta_0^3, \qquad Z_0 = h_3 \zeta_3^0, \qquad A_0 = h \xi_0 \eta_0 \zeta_0,$$

où

$$h_1 = \lambda_1^3 \mu_1 \beta\gamma\delta, \qquad h_2 = \lambda_2^3 \mu_2 \alpha\gamma\delta, \qquad h_3 = \lambda_3^3 \mu_3 \alpha\beta\delta,$$

$$k = \delta \mu_1 \mu_2 \mu_3 \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\mu_1 \mu_2 \mu_3}},$$

où les h et k seront des entiers du corps sur lesquels on ne pourra faire qu'un nombre fini d'hypothèses, puisqu'on n'en peut faire qu'un nombre fini sur les idéaux δ, α, β, γ, μ, λ.

Si le point x_0, y_0, z_0 est sur la cubique C, le point ξ_0, η_0, ζ_0 sera sur une cubique C′ que j'appellerai encore *dérivée de* C.

Nos théorèmes subsistent évidemment.

Une cubique C n'a qu'un nombre fini de dérivées, puisqu'on ne peut faire qu'un nombre fini d'hypothèses sur les coefficients h et k.

A tout point rationnel de C correspond sur l'une de ses dérivées un point rationnel, de sorte que si C a une infinité de points rationnels, il doit en être de même pour une au moins de ses dérivées.

Les fonctions elliptiques relatives à la dérivée se déduisent de celles de la cubique C par une transformation de troisième ordre.

On peut quelquefois tirer de là des résultats dans l'énoncé desquels n'interviennent que des entiers ordinaires. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'un des trois points d'inflexion est rationnel ordinaire.

Si le point $X = A = 0$, que j'appelle M, est rationnel ordinaire, par ce point M passeront quatre droites qui contiendront chacune deux autres points d'inflexion. Soient

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0, \qquad A_4 = 0$$

ces quatre droites. Si nous adjoignons au domaine de rationalité les coefficients de A_1, nous définirons un certain corps algébrique K_1.

Soient maintenant $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ les deux tangentes d'inflexion aux points de rencontre de la cubique avec $A_1 = 0$.

Adjoignons au domaine de rationalité les coordonnées des deux points d'inflexion correspondants; nous définirons un nouveau corps

algébrique K'_1 qui contiendra K_1, et nous pourrons supposer que l'équation de la cubique s'écrit

$$XY_1Z_1 = A_1^3,$$

les coefficients de X étant des entiers ordinaires, ceux de Y_1 et de Z_1 des entiers du corps K'_1, ceux de A_1 des entiers du corps K_1.

Si x_0, y_0, z_0 est un point rationnel ordinaire de la cubique C et que x_0, y_0, z_0 soient des entiers premiers entre eux; si X_0, Y_1^0, Z_1^0, A_1^0 sont les résultats de la substitution de x_0, y_0, z_0; on aura d'après ce qui précède

$$X_0 = h_1\xi_0^3, \qquad Y_1^0 = h_2\eta_0^3, \qquad Z_1^0 = h_3\zeta_0^3, \qquad A_1^0 = k\xi_0\eta_0\zeta_0;$$

les quantités qui figurent dans les seconds membres de ces équations sont des quantités rationnelles du corps K'_1. Mais nous devons observer que, si l'on échange les deux points d'inflexion $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, toute quantité rationnelle du corps K'_1 se transformera en une autre quantité rationnelle du même corps que l'on appellera sa *conjuguée;* toute fonction symétrique et rationnelle de deux quantités conjuguées sera une quantité rationnelle du corps K_1.

Nous concluons que h_1, ξ_0 et k sont des quantités rationnelles du corps K_1, tandis que h_2 et h_3, η_0 et ζ_0 sont conjugués.

Cela posé, si l'on permute les quatre droites A_1, A_2, A_3, A_4, le corps K_1 se changera dans l'un des trois corps conjugués K_2, K_3, K_4.

Soient $h_{1.2}$, $h_{1.3}$, $h_{1.4}$ les quantités qui se déduisent de h_1 quand on remplace le corps K_1 par l'un des corps conjugués K_2, K_3, K_4. Ce seront des entiers algébriques de ces trois corps, de même que h_1 était un entier algébrique du corps K_1.

Soient de même $\xi_{0.2}$, $\xi_{0.3}$, $\xi_{0.4}$ les quantités qui se déduisent de ξ_0 par le même procédé. Ce seront des quantités rationnelles des trois corps K_2, K_3, K_4, de même que ξ_0 était une quantité rationnelle du corps K_1.

Sur les entiers algébriques $h_{1.2}$, $h_{1.3}$, $h_{1.4}$ on ne pourra faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

X_0 étant un entier ordinaire, on aura

$$X_0 = h_1\xi_0^3, \qquad X_0 = h_{1.2}\xi_{0.2}^3, \qquad X_0 = h_{1.3}\xi_{0.3}^3, \qquad X_0 = h_{1.4}\xi_{0.4}^3,$$

les trois dernières égalités se déduisant de la première en passant du corps K_1 à l'un des corps conjugués. Si donc on pose

$$h_1 h_{1.2} h_{1.3} h_{1.4} = H, \qquad \xi_0 \xi_{0.2} \xi_{0.3} \xi_{0.4} = U,$$

il viendra

$$X_0^4 = HU^3$$

ou

$$X_0 = H\left(\frac{U}{X_0}\right)^3.$$

H est un entier ordinaire, puisque h_1, $h_{1.2}$, $h_{1.3}$, $h_{1.4}$ sont conjugués. De même, U est une fonction rationnelle ordinaire.

Comme on ne peut faire sur l'entier H qu'un nombre fini d'hypothèses, nous devons conclure que X_0 est égal à un cube parfait multiplié par un entier limité.

Cet énoncé suppose que les entiers x_0, y_0, z_0 sont premiers entre eux. Si l'on s'affranchit de cette restriction, il faudra dire que X_0 est égal à un cube parfait multiplié par le plus grand commun diviseur de x_0, y_0 et z_0 et par un entier limité. On appréciera mieux la généralité de cet énoncé si l'on se rappelle qu'une cubique qui a un point rationnel est toujours équivalente à une cubique qui a un point d'inflexion rationnel.

Pour généraliser nos résultats, nous pouvons encore chercher à mettre l'équation de la cubique sous la forme

$$(1\ ter) \qquad X_1 X_2 \ldots X_p = Y^n,$$

X_1, X_2, ..., X_p, Y étant des polynomes entiers à coefficients entiers. Je m'impose d'abord la condition que deux quelconques des courbes

$$X_i = 0, \qquad X_k = 0$$

n'aient aucun point commun sur la cubique.

Soient alors

$$u_i^{(1)}, \quad u_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad u_i^{(q)}$$

les arguments des points d'intersection de la cubique avec $X_i = 0$:

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m,$$

les arguments des points d'intersection de la cubique avec $Y = 0$.

On aura, à des périodes près,

$$\Sigma u_i = 0, \qquad \Sigma v = 0.$$

L'ensemble des points u devra reproduire n fois l'ensemble des points v. Chacun des points v devra figurer n fois dans l'ensemble des points u, et, comme l'ensemble des points u_i ne doit avoir aucun point commun avec l'ensemble des points u_k, chaque point v devra figurer n fois dans un des ensembles u_i. Il suit de là que les points u_i doivent être confondus n à n, et l'ordre de multiplicité de l'un quelconque d'entre eux doit être un multiple de n.

Considérons alors un ensemble d'arguments

$$w_i^{(1)}, \quad w_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad w_i^{(s)} \quad \left(s = \frac{q}{n}\right),$$

qui seront les mêmes que les arguments u_i avec cette différence que leurs ordres de multiplicité seront n fois plus petits. Alors Σw_i est la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période. D'ailleurs l'ensemble de tous les points w est identique à l'ensemble des points v.

Le problème revient donc à chercher p groupes rationnels; la somme des arguments de chaque groupe étant la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période, la somme des arguments de tous les groupes étant une période. J'ajoute que le nombre des points de tous les groupes doit être divisible par 3 et qu'il en est de même du nombre des points de chaque groupe, à moins que n ne soit divisible par 3.

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, on pourra mettre l'équation sous la forme (1 *ter*). On pourra trouver en effet un polynome X_i qui ait un zéro d'ordre n en chacun des points w_i et un polynome Y qui ait un zéro simple en chacun des points v_i. Considérons alors le rapport

$$\frac{Y^n}{X_1 X_2 \ldots X_p}.$$

Ce sera une fonction doublement périodique de l'argument elliptique d'un point de la cubique, et cette fonction ne deviendra jamais infinie; ce sera donc une constante que nous pourrons supposer égale à 1.

Soit x_0, y_0, z_0 un point rationnel de C. Pour plus de simplicité, j'entendrai de nouveau le mot *rationnel* dans le sens ordinaire ; il serait d'ailleurs facile de généraliser pour un corps algébrique quelconque. Je pourrai donc supposer que x_0, y_0, z_0 sont des entiers premiers entre eux, et j'appellerai X_i^0 et Y_0 le résultat de la substitution de ces entiers dans X_i et Y. On aura alors

$$X_1^0 X_2^0 \ldots X_p^0 = Y_0^n.$$

Le plus grand commun diviseur de X_1^0 et X_2^0 (qui sont des entiers) devra diviser Y_0, et par hypothèse les trois courbes $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $Y = 0$ n'ont aucun point commun.

Il en résulte évidemment qu'en appelant Δ le résultant de X_1, X_2, Y, il existe neuf polynomes P à coefficients entiers, tels que l'on ait identiquement

$$P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 Y = \Delta x^q,$$
$$P'_1 X_1 + P'_2 X_2 + P'_3 Y = \Delta y^q,$$
$$P''_1 X_1 + P''_2 X_2 + P''_3 Y = \Delta z^q,$$

q étant un exposant entier convenable. D'où il suit que le plus grand commun diviseur de X_1^0, X_2^0, Y_0 doit diviser à la fois Δx_0^q, Δy_0^q, Δz_0^q et par conséquent Δ.

On ne peut donc faire sur les diviseurs communs des X_i^0 et de Y_0 qu'un nombre fini d'hypothèses.

Par un raisonnement tout à fait pareil à celui qui précède, on en déduirait

$$X_1^0 = h_1 (\xi_1^0)^n, \qquad X_2^0 = h_2 (\xi_2^0)^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X_p^0 = h_p (\xi_p^0)^n, \qquad Y_0 = k \xi_1^0 \xi_2^0 \ldots \xi_p^0,$$

les h et k étant des entiers sur lesquels on ne peut faire qu'un nombre fini d'hypothèses, et les ξ_i^0 étant des entiers.

Nous sommes ainsi amenés à nous poser la question suivante :

Si l'on pose

$$(2) \qquad X_i = h_i \xi_i^n, \qquad Y = k \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p,$$

quel sera le lieu du point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ dans l'espace à p dimensions quand le point x, y, z décrira la cubique C?

Les points rationnels de ce lieu correspondront aux points rationnels de C, de sorte que ce lieu jouera un rôle analogue à celui de la cubique dérivée C'.

Soient u l'argument elliptique sur C, ω et ω' les périodes; soit $\theta(u)$ une fonction θ définie de telle sorte que

$$\theta(0) = 0, \qquad \theta(u + \omega) = \theta(u),$$
$$\theta(u + \omega') = e^{au+b}\theta(u), \qquad a = \frac{2i\pi}{\omega}.$$

Soient λ_i le degré de X_i et

$$\Theta_i(u) = \theta(u - w_i^{(1)})\theta(u - w_i^{(2)})\ldots\theta(u - w_i^{(s)}) \qquad \left(s = \frac{3\lambda_i}{n}\right).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les arguments des points d'intersection de la cubique avec $x = 0$. Soit

$$\eta = \theta(u - \alpha_1)\theta(u - \alpha_2)\theta(u - \alpha_3).$$

Les expressions

$$\frac{X_i}{\Theta_i^n}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-\lambda_i}, \qquad \frac{Y}{\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_p}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-q}$$

$\left(\text{où } q = \frac{\Sigma\lambda_i}{n} \text{ est le degré de } \lambda\right)$ sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce (se reproduisant à un facteur constant près par l'addition d'une période) qui ne deviennent jamais infinies. Elles se réduisent donc à des exponentielles, de sorte que l'équation de la cubique pourra s'écrire

$$X_i = \mu_i\Theta_i^n\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\lambda_i} e^{n\rho_i u}, \qquad Y = \mu_{p+1}\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_p\left(\frac{x}{\eta}\right)^q e^{\rho u},$$

les μ et les ρ étant des constantes, ou bien encore

$$\xi_i = \nu_i\Theta_i\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{\lambda_i}{n}} e^{\rho_i u},$$

les ν étant des constantes.

Si les λ_i sont tous égaux, c'est là l'équation en coordonnées homogènes d'une courbe de genre 1 dans l'espace à $p-1$ dimensions. Quel est le degré de cette courbe et quelles sont les périodes correspondantes?

On a

$$\Theta_i(u+\omega)=\Theta_i(u); \qquad \Theta_i(u+\omega')=e^{a'u+b'-a\Sigma w_i}\Theta_i(u),$$
$$\Theta_i(u+h\omega')=e^{a''u+b''-ah\Sigma w_i}\Theta_i(u),$$
$$a'=\frac{3\lambda_i}{n}a, \qquad b'=\frac{3\lambda_i}{n}b; \qquad a''=ha', \qquad b''=hb'+a'\omega'\frac{h(h-1)}{2}.$$

Quand u augmente de ω, les quantités X_i, η, Θ_i et x ne changent pas. Donc $e^{n\rho_i u}$ ne change pas. Quand u augmente de ω', les quantités X_i, x ne changent pas; Θ_i et η sont multipliés par

$$e^{a'u+b'-a\Sigma w_i}, \quad e^{3au+3b}.$$

Donc $e^{n\rho_i u}$ est multiplié par

$$e^{na\Sigma w_i}.$$

Donc $n\rho_i\omega$ est un multiple de $2i\pi$, $n\rho_i\omega'$ est égal à $na\Sigma w_i$ à un multiple près de $2i\pi$. Nous avons dit que Σw_i est le $n^{\text{ième}}$ d'une période. On a donc

$$n\Sigma w_i=\beta_i\omega+\beta'_i\omega',$$

β_i et β'_i étant des entiers. Il vient alors

$$\rho_i=\frac{2i\pi\beta'_i}{n}.$$

On a d'ailleurs

$$\rho=\Sigma\rho_i.$$

Quand u augmente de ω ou de ω', le logarithme de $\Theta_i e^{\rho_i u}$ augmente de

$$\frac{2i\pi\beta'_i}{n}+a'u+b'-a\Sigma w_i+\frac{2i\pi\beta'_i\omega'}{n\omega'}=a'u+b'-\frac{2i\pi\beta_i}{n}.$$

Il suit de là que les rapports des ξ_i sont des fonctions doublement

périodiques de u, dont les périodes dépendent des entiers β_i et β'_i, ou plutôt des restes de ces entiers à n. Ces fonctions admettront la période

$$\gamma\omega + \gamma'\omega',$$

pourvu que tous les $\gamma\beta_i + \gamma'\beta'_i$ donnent le même reste à n.

Il est aisé ainsi de déterminer ces périodes et l'on en déduit aisément le degré de notre courbe de genre 1, que nous pourrons appeler encore une *courbe dérivée de* C.

On voit que le nombre des courbes dérivées est encore fini, qu'à tout point rationnel de C correspond un point rationnel de l'une des dérivées et que les fonctions elliptiques relatives à une dérivée se déduisent de celles relatives à C par une transformation.

Toute courbe dérivée admettant un point rationnel étant équivalente à une cubique, comme on l'a vu au paragraphe IV, si la cubique C admet une infinité de points rationnels, on aura ainsi le moyen de définir un certain nombre d'autres cubiques (dont les fonctions elliptiques se déduisent de celles de C par une transformation) et sur l'une au moins desquelles il y aura une infinité de points rationnels.

Ne supposons plus que tous les λ_i soient égaux.

Nous pourrons trouver p^2 entiers β_{ik} et γ_i, dont le déterminant soit égal à 1 et tels que

$$\Sigma\beta_{ik}\lambda_i = 0, \qquad \Sigma\gamma_i\lambda_i = \delta,$$

δ étant le plus grand commun diviseur des λ_i.

Alors les produits

$$Z_k = \Pi\xi_i^{\beta_{ik}} = \Pi(\nu_i\Theta_i e^{\rho_i u})^{\beta_{ik}}$$

seront des fonctions doublement périodiques de u dont les périodes se détermineraient comme nous venons de le faire. Alors les $p-1$ quantités Z_k seront les coordonnées non homogènes d'un point décrivant une courbe de genre 1 dans l'espace à $p-1$ dimensions. Cette courbe pourra s'appeler encore une *courbe dérivée de* C, et ces courbes dérivées de C jouiront encore des mêmes propriétés que dans les cas examinés jusqu'ici.

On peut poser, par exemple,

$$Z'_k = \xi_k(\Pi\xi_i^{\gamma_i})^{-\frac{\lambda_k}{\mu}},$$

et Z'_k sera encore doublement périodique. (Inutile d'ajouter que ces résultats deviennent illusoires pour $p = 2$.)

Il n'y aurait rien à changer à ce qui précède si, au lieu de l'équation (1 *ter*), on partait d'une équation analogue

$$(1\,d) \qquad X_1^{q_1} X_2^{q_2} \ldots X_p^{q_n} = Y^n,$$

où les q seraient des entiers quelconques. Ici encore on ne peut faire qu'un nombre fini d'hypothèses sur les diviseurs communs de X_1^0 et X_2^0 quand x_0, y_0, z_0 sont premiers entre eux. Il en résulte que X_k^0 (si q_k est premier avec n) sera une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite à un facteur constant près sur lequel on ne peut faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

Voyons maintenant dans quels cas on pourra avoir une équation de la forme (1 *ter*).

Supposons que $\frac{3\lambda_i}{n}$ soit un multiple de 3 plus ε_i ($\varepsilon_i = 0, 1, 2$). Alors le groupe des points w_i étant rationnel, on devra avoir, d'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe VI,

$$(3) \qquad \Sigma w_i = \varepsilon_i \alpha + 3 n_i \alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s).$$

Cette expression devra être la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période, c'est-à-dire que l'argument d'un des points rationnels (à savoir le point Σw_i, si $\varepsilon_i = 1$, et le point $2\Sigma w_i$, si $\varepsilon_i = 2$) ou la différence des arguments de deux points rationnels (à savoir Σw_i, si $\varepsilon_i = 0$), devra être la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période. Cette condition est d'ailleurs évidemment suffisante.

En effet, si par exemple

$$\alpha = \frac{\omega}{n},$$

nous pourrons trouver trois groupes rationnels Σw_1, Σw_2, Σw_3, tels

que

$$\Sigma w_1 = q_1 \alpha, \qquad \Sigma w_2 = q_2 \alpha, \qquad \Sigma w_3 = q_3 \alpha,$$

tels que $q_1 + q_2 + q_3 \equiv 0 \pmod{n}$ et que $\frac{3\lambda_i}{n} \equiv q_i \pmod{3}$.

Si n n'est pas divisible par 3, q_i devra être divisible par 3; nous pourrons alors supposer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Si n est divisible par 3, nous pourrons encore prendre

$$q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \pmod{3},$$

puisqu'on aura

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \pmod{3}.$$

Si nous avions

$$3\alpha = \frac{\omega}{n},$$

nous prendrions encore

$$\Sigma w_1 = q_1 \alpha, \qquad \Sigma w_2 = q_2 \alpha, \qquad \Sigma w_3 = q_3 \alpha;$$

$$q_1 + q_2 + q_3 \equiv 0 \pmod{3n}, \qquad q_1 \equiv q_2 \equiv q_3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2, \qquad \frac{3\lambda_i}{n} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Je distinguerai deux cas :

1° Ou bien la différence des arguments de deux points rationnels est le $n^{\text{ième}}$ d'une période. Dans ce cas, *la considération des courbes dérivées nous apprend réellement quelque chose de nouveau.*

Si cette condition est remplie par une cubique, elle le sera par toutes les cubiques équivalentes; mais, en général, elle ne le sera pas par C, ni, par conséquent, par aucune des cubiques équivalentes, *à moins qu'on n'étende par voie d'adjonction le domaine de rationalité.*

2° Ou bien la différence des arguments de deux points rationnels ne sera jamais le $n^{\text{ième}}$ d'une période (à moins d'être d'une période).

S'il en est ainsi, il faudra, d'après ce que nous venons de voir, que l'argument d'un des points rationnels soit le $n^{\text{ième}}$ d'une période, soit

$$\alpha = \frac{\omega}{n}.$$

Alors

$$3\alpha = \frac{3\omega}{n}$$

sera la différence des arguments de deux points rationnels et en même temps le $n^{\text{ième}}$ d'une période; il faudrait donc que ce fût une période, ce qui ne peut arriver que de deux manières : si $\omega = 0$, si n est divisible par 3.

Le second cas se ramène aisément au premier, car si n est divisible par 3 et que $\frac{3\omega}{n}$ soit une période, α sera le tiers d'une période. Mais comme les arguments ne sont définis qu'à $\frac{1}{3}$ de période près, nous pouvons supposer $\alpha = 0$, d'où $\omega = 0$.

Si α est nul, on aura

$$\Sigma w_i = -\Sigma p_s \alpha_s,$$

et le second membre ne pourra être la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période que si tous les p_s sont nuls; car l'expression $\Sigma p_s \alpha_s$ étant la différence des arguments de deux points rationnels ne peut être la $n^{\text{ième}}$ partie d'une période.

On a donc

$$\Sigma w_i = 0.$$

Dans ce cas que nous apprend l'analyse précédente? Que $\frac{X_1^{\lambda_2}}{X_2^{\lambda_1}}$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre rationnel. Soit alors

$$\frac{3\lambda_1\lambda_2}{n} \equiv -\varepsilon \pmod 3.$$

Nous pourrons alors trouver deux courbes rationnelles $Z_1 = 0$ et $Z_2 = 0$, de degré $\frac{\lambda_1\lambda_2}{n} + \frac{\varepsilon}{3}$, passant toutes deux ε fois par le point rationnel, dont l'argument $\alpha = 0$; la première $Z_1 = 0$ passant λ_2 fois par chacun des $\frac{3\lambda_1}{n}$ points w_1; la seconde $Z_2 = 0$ passant λ_1 fois par chacun des $\frac{3\lambda_2}{n}$ points w_2.

On aura alors

$$\frac{X_1^{\lambda_2}}{X_2^{\lambda_1}} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n,$$

ce qui suffit déjà pour prouver que le premier membre est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Le résultat en question est donc illusoire, puisqu'on aurait pu l'obtenir par voie purement algébrique, sans faire intervenir le raisonnement arithmétique fondé sur l'impossibilité de décomposer un entier de plusieurs manières en facteurs premiers.

La considération des cubiques dérivées serait donc sans intérêt dans ce cas.

Nous voyons toutefois que X_1 doit être une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite, multipliée par un entier sur lequel on ne peut faire qu'un nombre fini d'hypothèses, *si l'on connaît le plus grand commun diviseur de* x_0, y_0, z_0. Cette restriction diminue un peu la portée du résultat, qui est d'ailleurs indépendant de la considération des cubiques dérivées.

Le cas où la considération des cubiques dérivées peut être utile est donc celui où les fonctions elliptiques relatives à ces cubiques dérivées se déduisent de celles qui correspondent à C par une transformation *qui n'est pas du premier ordre*.

IX. — Courbes de genre supérieur.

Je ne dirai que quelques mots des courbes de genre supérieur. Il n'est plus vrai que de la connaissance d'un point rationnel on puisse déduire celle d'une infinité d'autres points rationnels. Mais de la connaissance d'un *groupe* rationnel (et par conséquent de celle d'un point rationnel) on peut déduire celle d'une infinité d'autres groupes rationnels.

Soit en effet C une courbe rationnelle de genre p et de degré m, et soit un groupe rationnel de p points sur cette courbe. Le nombre des points doubles sera

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p.$$

Si nous coupons par une courbe adjointe C′ de degré $q \geqq m - 2$, le nombre des points d'intersection différents des points doubles sera

$$mq - 2d$$

et sur ce nombre, $mq - 2d - p$ pourront être choisis arbitrairement.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les p intégrales abéliennes de première espèce. Un groupe de p points sera défini quand on se donnera les p sommes

$$\Sigma u_1 = \alpha_1, \qquad \Sigma u_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \Sigma u_p = \alpha_p$$

pour ses p points, sommes que j'appellerai ses *arguments*. J'appellerai alors le groupe ainsi défini le *groupe* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ ou simplement le *groupe* α. On pourra choisir les constantes d'intégration de telle façon que la somme des arguments soit nulle pour les points d'intersection d'une courbe adjointe quelconque, les points doubles étant laissés de côté.

Si les groupes de p points α, β et γ sont rationnels, je dis qu'il en est de même du groupe $\beta + \gamma - \alpha$. En effet, par les groupes β et γ je puis faire passer une courbe adjointe rationnelle de degré $q > \frac{2d - 3p}{m}$; elle coupera C en $mq - 2d - 2p$ autres points formant un groupe rationnel G dont la somme des arguments sera $-(\beta + \gamma)$. Par G et par le groupe α je puis faire passer une courbe rationnelle adjointe de degré q qui coupe C en p autres points formant un groupe rationnel d'arguments $\beta + \gamma - \alpha$.

Supposons maintenant que le groupe de p points α soit rationnel. Je mène d'abord une courbe adjointe rationnelle quelconque de degré $q \geqq m - 2$; elle coupera C suivant un groupe rationnel G de $mq - 2d$ points; la somme des arguments sera zéro.

Soit δ le plus grand commun diviseur de m et de $2d$; nous pourrons trouver deux nombres entiers positifs $q' \geqq m - 2$ et β tels que

$$m(q' - q) - \beta(mq - 2d) = \delta h,$$

h étant un entier positif quelconque. Je veux maintenant que

$$\delta h = (K + 1)p.$$

Soit alors δ' le plus grand commun diviseur de m, $2d$ et p; soit $p = \xi\delta'$, $\delta = \varepsilon\delta'$; il nous suffira de prendre $h = \xi$, $K + 1 = \varepsilon$.

Cela posé, je fais passer une courbe adjointe rationnelle de degré q', $\beta + 1$ fois par le groupe G et K fois par le groupe α; cette courbe est ainsi entièrement déterminée, et elle coupe encore C en p autres points, car on a

$$mq' = (K + 1)p + (\beta + 1)(mq - 2d) + 2d.$$

Ces p autres points formeront un groupe rationnel et la somme des arguments sera $-K\alpha$ ou $\alpha - \varepsilon\alpha$.

Il résulte de tout cela que les groupes rationnels de p points situés sur C sont donnés par une formule

$$\alpha + \varepsilon n\alpha + \Sigma p_s(\alpha - \alpha_s)$$

tout à fait de même forme que les formules analogues relatives aux cubiques.

Le nombre ε (qui pour les cubiques est égal à 3) est le plus grand commun diviseur de m et $2d$ divisé par le plus grand commun diviseur de m, $2d$ et p.

On conçoit la possibilité de construire de cette manière une théorie analogue à celle des cubiques.

Le théorème des tourbillons en Thermodynamique;

PAR M. JOUGUET.

1. Considérons une masse fluide continue, animée d'un mouvement qui n'altère pas sa continuité. Désignons par u, v, w les composantes suivant les trois axes de la vitesse d'une molécule : ce sont des fonctions continues du temps t et des coordonnées x, y, z d'un point géométrique (variables d'Euler). Les molécules qui, au temps t_0, sont situées sur une courbe fermée C_0 forment, à tout instant, une courbe fermée C. On peut énoncer le théorème de Helmholtz en disant que l'intégrale curviligne

$$\int_c u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

conserve, à tout instant, la même valeur.

La démonstration de ce théorème, applicable aux fluides dénués de viscosité, est subordonnée en outre aux restrictions suivantes :

a. Les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur chaque élément de volume admettent un potentiel.

b. La pression est fonction de la densité seule.

M. Duhem a montré [1] comment la Thermodynamique permet

[1] *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X; 1893). *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II; 1892.

d'étudier le mouvement de fluides pour lesquels ces restrictions n'ont aucun sens. Nous nous proposons de rechercher ce que devient, dans sa théorie, le théorème de Helmholtz; nous continuerons à supposer nulle la viscosité.

On apercevra facilement, à la lecture de cette Note, tout ce qu'elle doit à M. Duhem. Non seulement la méthode lui est empruntée, mais bien des pages sont consacrées à reproduire, sans grandes modifications, ses résultats. Nous prions qu'on nous en excuse, comme il l'a déjà fait lui-même. Il nous a paru que cette reproduction était utile pour bien mettre en lumière l'insuffisance des énoncés (*a*) et (*b*) en Hydrodynamique et la possibilité de leur remplacement par d'autres plus généraux.

I.

2. Dans les fluides habituellement étudiés en Hydrodynamique, l'état physique et chimique en un point est complètement défini par la densité ρ et la température absolue T. Nous supposerons ici que, pour cette définition, il faut joindre à ces deux variables un nombre fini de paramètres algébriques, un par exemple, que nous désignerons par λ, et un nombre fini de paramètres géométriques, un par exemple, le vecteur M dont les projections sur les trois axes seront A, B, C. Les variables ρ, λ, A, B, C, T seront supposées normales. La Thermodynamique conduit alors à mettre le potentiel thermodynamique interne d'une masse fluide sous la forme

$$F = \int_E \varphi(\rho, \lambda, A, B, C, T)\rho\, d\tau + \Psi. \tag{1}$$

Dans cette expression, $\varphi(\rho, \lambda, A, B, C, T)\rho\, d\tau$ est le potentiel thermodynamique interne de l'élément de volume $d\tau$; le signe $\int$ représente une intégrale triple étendue à tout le volume E du fluide; Ψ est un terme complémentaire, dépendant de la position relative des divers éléments du fluide et des variables fixant l'état de chacun d'eux, *abstraction faite de la température*.

L'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse faire sur Ψ, c'est qu'il s'écrit sous la forme d'une intégrale sextuple (¹)

$$(2)\quad \Psi = \frac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \lambda, A, B, C, \rho', \lambda', A', B', C', x, y, z, x', y', z')\rho\rho'\, d\tau\, d\tau',$$

dont le champ est l'ensemble à 6 dimensions obtenu en associant successivement chaque point de E avec tous les autres points du même domaine. ρ, λ, A, B, C se rapportent à l'élément de volume $d\tau$ de coordonnées x, y, z; ρ', λ', A', B', C' à l'élément $d\tau'$ de coordonnées x', y', z'.

A la vérité, un fluide étant isotrope, φ ne dépend de A, B, C que par l'intermédiaire de M. De même, A, B, C, A', B', C', x, y, z, x', y', z' n'entrent pas d'une manière quelconque dans la fonction ψ. Celle-ci ne dépend que de la grandeur des vecteurs M et M', de l'angle qu'ils font entre eux, de ceux qu'ils font avec la droite joignant les éléments $d\tau$ et $d\tau'$, et de la longueur de cette droite. Mais ces remarques n'ont pas d'intérêt pour ce que nous avons en vue.

Nous supposerons que l'intégrale Ψ peut se calculer par deux intégrales triples successives et nous poserons

$$(3)\qquad V(x, y, z, t) = \int_E \psi\rho'\, d\tau'.$$

Le point x, y, z peut se trouver dans E ou à l'extérieur. Par hypothèse, la fonction V existe dans l'un et dans l'autre domaine. Nous supposons en outre qu'elle est continue dans chacun de ces domaines et qu'elle y admet, par rapport à x, y, z, des dérivées partielles du premier ordre données par la règle de la dérivation sous le signe $\int$. Ce sont les hypothèses faites par M. Duhem dans son Mémoire sur le *Potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* que nous avons déjà cité. On trouvera dans ce Mémoire leur discussion analy-

(¹) Duhem, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.*

tique sur laquelle il n'y a pas à revenir. Elles permettent d'écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \rho' d\tau' + \frac{\partial \rho}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \rho' d\tau' + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \rho' d\tau'$$
$$+ \frac{\partial A}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial A} \rho' d\tau' + \frac{\partial B}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial B} \rho' d\tau' + \frac{\partial C}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial C} \rho' d\tau'.$$

Et si nous posons

$$(4) \quad \begin{cases} X_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial x} \rho' d\tau', \quad Y_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial y} \rho' d\tau', \quad Z_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial z} \rho' d\tau', \\ a_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial A} \rho' d\tau', \quad b_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial B} \rho' d\tau', \quad c_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial C} \rho' d\tau', \\ I = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \rho' d\tau', \\ L_i = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \rho' d\tau', \end{cases}$$

la valeur de $\frac{\partial V}{\partial x}$ deviendra

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -X_i - I\frac{\partial \rho}{\partial x} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial x} - a_i \frac{\partial A}{\partial x} - b_i \frac{\partial B}{\partial x} - c_i \frac{\partial C}{\partial x}. \\ \text{On aura de même} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -Y_i - I\frac{\partial \rho}{\partial y} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial y} - a_i \frac{\partial A}{\partial y} - b_i \frac{\partial B}{\partial y} - c_i \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -Z_i - I\frac{\partial \rho}{\partial z} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial z} - a_i \frac{\partial A}{\partial z} - b_i \frac{\partial B}{\partial z} - c_i \frac{\partial C}{\partial z}. \end{cases}$$

Les actions que le reste de la masse exerce sur l'élément $d\tau$ se composent d'une force $\rho\, d\tau (\overline{X_i} + \overline{Y_i} + \overline{Z_i})$ et d'influences $\rho\, d\tau I$, $\rho\, d\tau L_i$, $\rho\, d\tau a_i$, $\rho\, d\tau b_i$, $\rho\, d\tau c_i$. Les équations (5) montrent que la force ne dérive pas d'un potentiel; c'est en quoi la restriction (a) du paragraphe I ne saurait être énoncée ici.

On remarquera que l'existence des influences $\rho\, d\tau a_i$, $\rho\, d\tau b_i$, $\rho\, d\tau c_i$ suppose celle d'un couple agissant sur l'élément $d\tau$: leur travail vir-

tuel est, en effet, différent de o quand l'élément $d\tau$ tourne sur lui-même. On sait que de semblables couples se rencontrent dans l'étude des corps aimantés et, si l'on adopte les idées de Helmholtz, dans celle de l'action entre deux courants électriques.

5. Les actions que les corps étrangers au fluide exercent sur lui sont, les unes des pressions P $d\omega$ appliquées à chaque élément $d\omega$ de la surface extérieure, les autres des forces $\rho(\overline{X_e} + \overline{Y_e} + \overline{Z_e})\,d\tau$ et des influences $\rho a_e\,d\tau$, $\rho b_e\,d\tau$, $\rho c_e\,d\tau$ appliquées à chaque élément de volume $d\tau$. A ces dernières il faut ajouter les forces d'inertie

$$-\rho(\overline{j_x} + \overline{j_y} + \overline{j_z})\,d\tau,$$

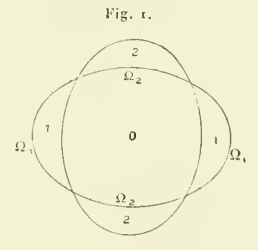
j étant l'accélération.

Exprimons le travail virtuel de ces actions. Envisageons une modification virtuelle en laquelle chaque point matériel se déplace de

$$\overline{\delta x} + \overline{\delta y} + \overline{\delta z}.$$

Le volume occupé par le fluide est déformé. Avant la modification, il comprend la partie o et la partie infiniment petite 1 répartie le long de la portion Ω_1 de la surface primitive. Après la modification, il se compose de o et de l'espace 2 confinant à o le long de la portion Ω_2

Fig. 1.



de la surface primitive. Convenons de marquer, pour les paramètres ρ, λ, A, B, C, T, les variations qu'ils subissent en chaque point géométrique par la caractéristique δ, et celles qu'ils subissent en chaque point matériel par la caractéristique Δ. Le travail virtuel des actions

extérieures et des forces d'inertie est

$$
\begin{aligned}
\delta \tau_e + \delta \mathrm{J} = \underset{\Omega_1+\Omega_2}{\mathrm{S}} & [\mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, x)\,\delta x + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, y)\,\delta y + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, z)\,\delta z]\,d\omega \\
& + \int_{0+1} \rho[(\mathrm{X}_e - j_x)\,\delta x + (\mathrm{Y}_e - j_y)\,\delta y \\
& \qquad + (\mathrm{Z}_e - j_z)\,\delta z + \mathrm{L}_e \Delta\lambda + a_e \Delta \mathrm{A} + b_e \Delta \mathrm{B} + c_e \Delta \mathrm{C}]\,d\tau.
\end{aligned}
$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\Delta\lambda = \delta\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z,$$

et l'on peut écrire des relations analogues pour $\Delta\mathrm{A}$, $\Delta\mathrm{B}$, $\Delta\mathrm{C}$. L'expression de $\delta\tau_e + \delta\mathrm{J}$ peut donc se transformer en

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta \tau_e + \delta \mathrm{J} = \underset{\Omega_1+\Omega_2}{\mathrm{S}} & [\mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, x)\,\delta x + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, y)\,\delta y + \mathrm{P}\cos(\mathrm{P}, z)\,\delta z]\,d\omega \\
& + \int_0 \rho[\mathrm{L}_e\delta\lambda + a_e\delta\mathrm{A} + b_e\delta\mathrm{B} + c_e\delta\mathrm{C}]\,d\tau \\
& + \int_0 \rho\left[\mathrm{X}_e - j_x + \mathrm{L}_e\frac{\partial\lambda}{\partial x} + a_e\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x} + b_e\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial x} + c_e\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial x}\right]\delta x\,d\tau \\
& + \int_0 \rho\left[\mathrm{Y}_e - j_y + \mathrm{L}_e\frac{\partial\lambda}{\partial y} + a_e\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial y} + b_e\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial y} + c_e\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial y}\right]\delta y\,d\tau \\
& + \int_0 \rho\left[\mathrm{Z}_e - j_z + \mathrm{L}_e\frac{\partial\lambda}{\partial z} + a_e\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z} + b_e\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial z} + c_e\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial z}\right]\delta z\,d\tau.
\end{aligned}
\right.
$$

4. On obtiendra les équations du mouvement en exprimant que

$$\delta\mathrm{F} - \delta\tau_e - \delta\mathrm{J} = 0$$

pour toute modification virtuelle en laquelle la température de chaque molécule reste constante.

Dans ce qui va suivre, les variables A, B, C joueraient, comme elles l'ont fait jusqu'ici, un rôle identique à celui de λ. On simplifiera beaucoup l'écriture en supposant dorénavant, pour faire le calcul,

qu'elles n'existent pas. Il sera facile, à la fin, de rétablir dans les formules les termes qu'elles auraient donnés, par analogie avec ceux que donnera λ.

5. Le calcul de $\delta \int \varphi \rho \, d\varpi$ se fera en suivant la méthode développée par M. Duhem, dans son Mémoire *Sur l'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (1). On posera

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \\
\mathrm{ES} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{T}}.
\end{aligned}
\right.
$$

S sera l'entropie de l'unité de masse du fluide censée homogène. La variation cherchée sera

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta \int \varphi \rho \, d\varpi = &\int_0 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \delta\lambda \, d\varpi \\
&+ \int_0 \rho \Big[\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \right) \delta x \\
&\qquad + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} \right) \delta z \Big] d\varpi \\
&+ \mathrm{S}_{\Omega_1 + \Omega_2} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] \, d\omega,
\end{aligned}
\right.
$$

n désignant la normale *intérieure* au fluide.

6. Nous insisterons davantage sur le calcul de $\delta \Psi$.

Ψ varie pour deux raisons : 1° à cause des variations $\delta\rho$, $\delta\lambda$, $\delta\rho'$, $\delta\lambda'$ en tout point géométrique du champ 0 ; 2° à cause de la disparition de la matière contenue dans 1 et de l'apparition de la matière contenue dans 2.

(1) *Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III, Mémoire n° II, Chap. VI, p. 91 ; 1893.

On écrira

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} 2\delta\Psi = {} & \int\int_{00}(\psi+\delta\psi)(\rho+\delta\rho)(\rho'+\delta\rho')\,d\tau\,d\tau' \\ & +\int\int_{02,20}(\psi+\delta\psi)(\rho+\delta\rho)(\rho'+\delta\rho')\,d\tau\,d\tau' \\ & +\int\int_{22}(\psi+\delta\psi)(\rho+\delta\rho)(\rho'+\delta\rho')\,d\tau\,d\tau' \\ & -\left(\int\int_{00}\psi\rho\rho'\,d\tau\,d\tau'+\int\int_{01,10}\psi\rho\rho'\,d\tau\,d\tau'+\int\int_{11}\psi\rho\rho'\,d\tau\,d\tau'\right). \end{aligned}\right.$$

Le symbole 00 représente l'ensemble à six dimensions obtenu en associant successivement à chaque point de 0 tous les autres points de 0. Le symbole 02,20 représente un ensemble formé de deux parties, la première 02 obtenue en associant successivement à chaque point de 0 tous les points de 2, la seconde 20 obtenue en associant à chaque point de 2 tous les points de 0. Les symboles 22, 11 et 01,10 ont des significations analogues.

Considérons d'abord les deux intégrales relatives au champ 00 qui figurent dans (9) par leur différence. Par raison de symétrie, cette différence est égale à

$$2\int\int_{00}\rho'\psi\delta\rho\,d\tau\,d\tau'+2\int\int_{00}\rho\rho'\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\delta\rho\,d\tau\,d\tau'+2\int\int_{00}\rho\rho'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\delta\lambda\,d\tau\,d\tau',$$

ou encore

$$(9')\qquad 2\int_0 V\delta\rho\,d\tau-2\int_0\rho I\delta\rho\,d\tau-2\int_0\rho L_i\delta\lambda\,d\tau.$$

D'ailleurs, $\delta\rho$ peut s'exprimer en fonction de δx, δy, δz. En effet,

$$\delta\rho=\Delta\rho-\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta x-\frac{\partial\rho}{\partial y}\delta y-\frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z \quad \text{et} \quad \Delta\rho=-\rho\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right).$$

D'où

$$\delta\rho=-\left[\frac{\partial(\rho\delta x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\delta y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\delta z)}{\partial z}\right].$$

Une intégration par parties transforme alors la somme (9′) en

$$(9'')\left\{\begin{aligned} &2\int_0 \rho\left[\frac{\partial(V-\rho I)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial(V-\rho I)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial(V-\rho I)}{\partial z}\delta z\right]d\tau-2\int_0 \rho L_i\delta\lambda\, d\tau\\ &\quad+2\mathbf{S}_{\Omega_1+\Omega_2}(\rho V-\rho^2 I)\left[\delta x\cos(n,x)+\delta y\cos(n,y)+\delta z\cos(n,z)\right]d\omega.\end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant dans (9) les intégrales relatives à 01, 10 et à 11. On peut les écrire

$$-\int_1 \rho\, d\tau\int_{1+0}\psi\rho'\, d\tau'-\int_1 \rho\, d\tau\int_0 \psi\rho'\, d\tau',$$

soit

$$-2\int_1 V\rho\, d\tau.$$

De même, celles qui sont prises dans 02, 20 et dans 22 donnent

$$2\int_2 V\rho\, d\tau.$$

On remarquera, pour ce dernier terme, que, dans la région 2, les $\delta\rho$ et les $\delta\lambda$ ne sont pas infiniment petits. Mais les intégrales qui s'y rapportent le sont : on les calcule en donnant à ρ, λ, V les valeurs que ces quantités avaient, avant la modification, aux points de o infiniment voisins de la surface Ω_2.

La différence $2\int_1 V\rho\, d\tau-2\int_2 V\rho\, d\tau$ s'écrit

$$(9''')\quad -2\mathbf{S}_{\Omega_1+\Omega_2}\rho V\left[\delta x\cos(n,x)+\delta y\cos(n,y)+\delta z\cos(n,z)\right]d\omega.$$

On a supposé, dans ce calcul, qu'au second ordre près

$$\int_1 \rho\, d\tau\int_{1+0}\psi\rho'\, d\tau' \quad \text{et} \quad \int_1 \rho\, d\tau\int_0 \psi\rho'\, d\tau'$$

étaient égales. C'est, en effet, ce qui arrive en général avec les hypothèses énoncées par M. Duhem sur la fonction ψ. Mais cela serait faux

si l'on supposait, par exemple, comme on le fait dans la théorie de la capillarité, que cette fonction n'a une valeur sensible que lorsque les points (x, y, z) (x', y', z') sont très voisins l'un de l'autre. Nous laisserons ce cas de côté en remarquant simplement que, s'il se rencontrait, seules seraient modifiées les intégrales doubles de $\delta\Psi$, à l'exclusion des intégrales triples. Or ces dernières suffisent pour le but que nous avons en vue.

Nous écrirons donc, en vertu de (9), (9′), (9″),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Psi = &\int_0 \rho\left[\frac{\partial(V-\rho I)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(V-\rho I)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(V-\rho I)}{\partial z}\delta z\right]d\tau - \int_0 \rho L_i \delta\lambda\, d\tau \\ &- \mathrm{S}_{\Omega_1+\Omega_2} \rho^2 I\,[\delta x\cos(n,x) + \delta y\cos(n,y) + \delta z\cos(n,z)]\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

7. Les formules (6), (8), (10) donnent $\delta F - \delta\mathfrak{E}_e - \delta J$. Cette expression se compose d'une somme d'intégrales de volume et d'intégrales de surface. La considération des intégrales de volume donne les équations du mouvement pour l'intérieur de la masse fluide. Nous les écrirons en rétablissant les termes dus à A, B, C.

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} &= L_e + L_i, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial A} &= a_e + a_i, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial B} &= b_e + b_i, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial C} &= c_e + c_i, \end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + ES\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(V-\rho I)}{\partial x} &= X_e - j_x + L_e\frac{\partial\lambda}{\partial x} + a_e\frac{\partial A}{\partial x} + b_e\frac{\partial B}{\partial x} + c_e\frac{\partial C}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} + ES\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial(V-\rho I)}{\partial y} &= Y_e - j_y + L_e\frac{\partial\lambda}{\partial y} + a_e\frac{\partial A}{\partial y} + b_e\frac{\partial B}{\partial y} + c_e\frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + ES\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial(V-\rho I)}{\partial z} &= Z_e - j_z + L_e\frac{\partial\lambda}{\partial z} + a_e\frac{\partial A}{\partial z} + b_e\frac{\partial B}{\partial z} + c_e\frac{\partial C}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + L_e d\lambda + a_e dA + b_e dB + c_e dC - ES\,dT$$

soit à chaque instant la différentielle exacte, par rapport à x, y, z, d'une fonction $-R(x, y, z, t)$. Les équations (12) s'écrivent

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(H + V - \rho I + R)}{\partial x} &= -\dot{j}_x, \\ \frac{\partial(H + V - \rho I + R)}{\partial y} &= -\dot{j}_y, \\ \frac{\partial(H + V - \rho I + R)}{\partial z} &= -\dot{j}_z, \end{aligned} \right.$$

formules d'où l'on peut tirer le théorème de Helmholtz par une voie connue [*voir* Poincaré, *Théorie des tourbillons*, Chap. I. Les équations (12′) ont la forme des équations (7), p. 10 de cet Ouvrage].

La fonction R existera, en particulier, toutes les fois que seront satisfaites les conditions suivantes :

a'. Les actions extérieures admettent un potentiel, c'est-à-dire que $X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + L_e d\lambda + a_e dA + b_e dB + c_e dC$ est la différentielle exacte d'une fonction $-\Omega(x, y, z, \lambda, A, B, C)$;

b'. Il existe à tout instant, dans toute la masse du fluide, une relation

$$(13) \qquad K(S, T) = 0$$

entre la température et l'entropie par unité de masse.

Cette dernière condition sera à son tour certainement remplie si, à partir d'un état où la relation (13) existe, chaque élément de matière ne subit que des transformations en lesquelles cette relation ne cesse pas d'être vérifiée; en particulier si, à partir d'un instant où toute la masse est homogène, chaque élément matériel ne subit que des transformations *isothermes* ou *adiabatiques*.

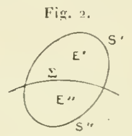
8. La considération des intégrales doubles de $\delta F - \delta\varpi_e - \delta J$ donne les conditions aux limites. Ce sont :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} P\cos(P, x) &= \left[\rho^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \rho^2 I\right]\cos(n, x), \\ P\cos(P, y) &= \left[\rho^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \rho^2 I\right]\cos(n, y), \\ P\cos(P, z) &= \left[\rho^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \rho^2 I\right]\cos(n, z). \end{aligned} \right.$$

Ces équations montrent d'abord que P a la direction de n (la pression doit donc être normale à la surface); ensuite que P doit avoir la valeur $\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 \mathrm{I}$.

Pour définir la pression qui s'exerce sur un élément intérieur $d\sigma$, faisons passer par $d\sigma$ une surface Σ qui partage le fluide en deux par-

Fig. 2.



ties E' et E''. Enlevons E' sans supprimer les actions qu'elle exerce sur les éléments de volume de E'' et qui ont pour potentiel

$$\int_{\mathrm{E}''} \rho\, d\tau \int_{\mathrm{E}'} \psi \rho'\, d\tau'.$$

Pour maintenir E' dans l'équilibre fictif de d'Alembert, il faudra alors appliquer à chaque élément $d\sigma$ de Σ une pression extérieure Π. Π sera, par définition, la pression à l'intérieur du fluide. Nous allons la calculer.

Le potentiel thermodynamique de E'' est

$$\int_{\mathrm{E}''} \varphi \rho\, d\tau + \frac{1}{2} \int\int_{\mathrm{E}''\mathrm{E}''} \psi \rho \rho'\, d\tau\, d\tau'.$$

Sa variation dans une modification virtuelle est, en vertu des formules (8) et (10),

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{E}''} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \delta\lambda\, d\tau + \int_{\mathrm{E}''} \rho \left[\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \right) \delta x \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} + \mathrm{ES} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} \right) \delta z \right] d\tau \\
&+ \mathrm{S}_{\mathrm{S}''+\Sigma} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\, d\omega \\
&- \int_{\mathrm{E}''} \rho \mathrm{L}''_i \delta\lambda\, d\tau + \int_{\mathrm{E}''} \rho \left[\frac{\partial(\mathrm{V}'' - \rho \mathrm{I}'')}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(\mathrm{V}'' - \rho \mathrm{I}'')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(\mathrm{V}'' - \rho \mathrm{I}'')}{\partial z} \delta z \right] d\tau. \\
&- \mathrm{S}_{\mathrm{S}''+\Sigma} \rho^2 \mathrm{I}'' [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\, d\omega.
\end{aligned}$$

V'', I'', L''_i sont les intégrales V, I, L_i prises dans le champ E'' seulement.

Le travail des actions exercées par E' sur E'' est, avec un signe inverse, l'expression

$$\int_{E''}\left[\Delta\rho\int_{E'}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\rho'\,d\tau' + \Delta\lambda\int_{E'}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\rho'\,d\tau' + \delta x\int_{E'}\frac{\partial\psi}{\partial x}\rho'\,d\tau' + \delta y\int_{E'}\frac{\partial\psi}{\partial y}\rho'\,d\tau' + \delta z\int_{E'}\frac{\partial\psi}{\partial z}\rho'\,d\tau'\right]\rho\,d\tau,$$

soit

$$\int_{E''}\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V'}{\partial z}\delta z\right)\rho\,d\tau - \int_{E''}(I'\,\delta\rho + L'_i\,\delta\lambda)\rho\,d\tau,$$

ou enfin

$$-\int_{E''}\rho L'_i\delta\lambda\,d\tau + \int_{E''}\rho\left[\frac{\partial(V'-\rho I')}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(V'-\rho I')}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(V'-\rho I')}{\partial z}\delta z\right]d\tau - \mathbf{S}_{S''+\Sigma}\rho^2 I'[\delta x\cos(n,x) + \delta y\cos(n,y) + \delta z\cos(n,z)]\,d\omega,$$

V', I', L'_i étant les intégrales V, I, L_i prises dans le champ E' seulement.

Enfin le travail virtuel des autres actions extérieures est, avec un signe contraire, l'expression

$$-\int_{E''}\rho[(X_e-j_x)\delta x + (Y_e-j_y)\delta y + (Z_e-j_z)\delta z]\,d\tau - \mathbf{S}_{S''}P[\cos(P,x)\delta x + \cos(P,y)\delta y + \cos(P,z)\delta z]\,d\omega - \mathbf{S}_{\Sigma}\Pi[\cos(\Pi,x)\delta x + \cos(\Pi,y)\delta y + \cos(\Pi,z)\delta z]\,d\omega.$$

En égalant à zéro la somme des trois expressions ci-dessus, et en remarquant que

$$V = V' + V'',$$
$$I = I' + I'',$$
$$L_i = L'_i + L''_i,$$

l'on obtient les équations du mouvement de la masse E″ sous la forme (11), (12) et la valeur de Π sous la forme

$$(15) \qquad \Pi = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 I,$$

et l'on vérifie que Π est normal à $d\sigma$.

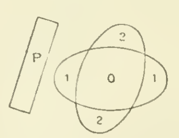
La relation (15) montre que la pression sur l'élément $d\sigma$ dépend de l'état de la masse *totale* par l'intermédiaire de I. On voit combien il serait difficile d'introduire ici la restriction (b) du n° **1**.

9. Nous rappellerons qu'un exemple de fluides auxquels s'appliquent les considérations précédentes est fourni par ceux dont les éléments s'attirent suivant la loi proposée par M. Faye dans ses études sur la queue des comètes.

II.

10. Les hypothèses faites au n° **2** sur le terme complémentaire Ψ ne sont pas nécessaires. Les fluides parfaitement doux aimantés offrent un exemple où elles ne sont pas vraies. L'action d'une masse aimantée sur un élément intérieur n'est pas définie. De là l'impossibilité de mettre Ψ sous la forme (2). De là aussi l'impossibilité d'énoncer, pour ces corps, la restriction (a) du n° **1**. Mais, si l'on adopte les idées de M. Duhem (¹), on peut écrire ainsi qu'il suit le

Fig. 3.



potentiel thermodynamique interne d'un système formé par des aimants permanents et immobiles P et par un fluide parfaitement doux

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 159 et 405.

aimanté E :

$$(16)\qquad F=\int_{P+E}\varphi(\rho, M, T)\rho\, d\varpi-\frac{1}{2}\int_{P+E}(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,d\varpi.$$

$M=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ est ici le moment magnétique de l'élément $d\varpi$. Quant à α, β, γ, ce sont les composantes suivant les trois axes du champ magnétique à l'intérieur de la masse aimantée.

Nous admettrons d'ailleurs que le travail virtuel des forces d'inertie et des actions extérieures qui agissent sur le fluide est de la forme

$$(17)\left\{\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_e+\delta J=&\mathbf{S}_{\Omega_1+\Omega_2}[P\cos(P,x)\delta x+P\cos(P,y)\delta y+P\cos(P,z)\delta z]\,d\omega\\&+\int_0\rho[(X_e-j_x)\delta x+(Y_e-j_y)\delta y+(Z_e-j_z)\delta z]\,d\varpi,\end{aligned}\right.$$

qui n'est qu'un cas particulier de la forme (6).

La variation de $\int\varphi\rho\, d\varpi$ pourra se calculer par la formule (8) : elle sera

$$(18)\left\{\begin{aligned}\delta\int\varphi\rho\, d\varpi=&\int_0\frac{\rho}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial M}(A\delta A+B\delta B+C\delta C)\,d\varpi\\&+\int_0\rho\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+ES\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial H}{\partial y}+ES\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y+\left(\frac{\partial H}{\partial z}+ES\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z\right]d\varpi\\&+\mathbf{S}_{\Omega_1+\Omega_2}\rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}[\delta x\cos(n,x)+\delta y\cos(n,y)+\delta z\cos(n,z)]\,d\omega,\end{aligned}\right.$$

H et S étant toujours définis par les égalités (7).

Seule, la variation de $\Psi=-\frac{1}{2}\int_{P+E}(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,d\varpi$ ne peut pas être obtenue par application des résultats qui précèdent. Elle se calcule toutefois par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons exposée plus haut. C'est M. Liénard qui en a donné le premier la valeur exacte ([1]). Contentons-nous d'indiquer le résultat de son

([1]) *Pressions à l'intérieur des aimants et des diélectriques* (*Lumière électrique*, t. LII, p. 7; 1894).

calcul en renvoyant à son travail pour la marche à suivre.

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\Psi = & -\int_0 (\alpha\,\delta A + \beta\,\delta B + \gamma\,\delta C)\,d\tau \\ & + \mathrm{S}_{\Omega_1+\Omega_2}[\alpha A + \beta B + \gamma C + 2\pi M^2 \cos^2(M, n)] \\ & \times [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)]\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

11. L'expression $\delta F - \delta \mathfrak{C}_e - \delta J$ est une somme d'intégrales triples et d'intégrales doubles. La considération des premières donne les équations du mouvement à l'intérieur du fluide.

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \alpha \frac{M}{\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial M}}, \\ B &= \beta \frac{M}{\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial M}}, \\ C &= \gamma \frac{M}{\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial M}}. \end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + ES \frac{\partial T}{\partial x} &= X_e - j_x, \\ \frac{\partial H}{\partial y} + ES \frac{\partial T}{\partial y} &= Y_e - j_y, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + ES \frac{\partial T}{\partial z} &= Z_e - j_z. \end{aligned}\right.$$

Imaginons que $X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz - ES\,dT$ soit à tout instant la différentielle exacte, par rapport à x, y, z, d'une fonction $-R(x, y, z, t)$. Les équations (21) prendront alors la forme

$$(21')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(H + R)}{\partial x} &= -j_x, \\ \frac{\partial(H + R)}{\partial y} &= -j_y, \\ \frac{\partial(H + R)}{\partial z} &= -j_z, \end{aligned}\right.$$

qui conduit au théorème de Helmholtz.

La fonction R existera en particulier toutes les fois que seront vérifiées les conditions (a') et (b') du n° **7**.

12. Les conditions aux limites sont données par la considération des intégrales doubles de $\delta F - \delta \varepsilon_e - \delta J$. En tenant compte de (20) pour transformer le terme $\alpha A + \beta B + \gamma C$, et en posant

$$\Pi = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + M \rho \frac{\partial \varphi}{\partial M} + 2\pi M^2 \cos^2(M, n), \tag{22}$$

on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} P \cos(P, x) = \Pi \cos(n, x), \\ P \cos(P, y) = \Pi \cos(n, y), \\ P \cos(P, z) = \Pi \cos(n, z). \end{array} \right. \tag{23}$$

On verra, comme au n° **8**, que la pression sur un élément $d\sigma$ intérieur au fluide est précisément Π, que cette pression est normale à $d\sigma$, mais qu'elle dépend de son orientation [1], si bien que la pression en un point n'est pas définie et que la restriction (b) du n° **1** n'aurait ici pas plus de sens que la restriction (a).

13. A la vérité, quand un fluide aimanté est en mouvement, il se produit dans sa masse soit des courants de conduction, soit des courants de déplacement. L'étude de ce mouvement ressortit donc à l'Électrodynamique et échappe (M. Duhem a insisté sur ce point) aux méthodes ordinaires de la Thermodynamique : les méthodes de Helmholtz permettraient de l'aborder dans toute sa complexité. Le cas que nous avons traité est un cas idéal : celui d'un fluide fictif qui ne serait ni conducteur, ni susceptible de prendre la polarisation diélectrique. Il présente donc fort peu d'intérêt pour la théorie de l'Électricité. Nous nous plaçons ici au point de vue de l'Énergétique, et nous avons voulu simplement montrer, par cet exemple, la possibilité de systèmes matériels pour lesquels la forme (2) du terme Ψ n'est plus

(1) LIÉNARD, *loc. cit.*

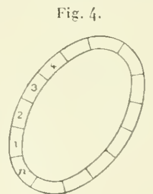
exacte, pour lesquels la notion de force intérieure, capitale en Mécanique classique, tombe complètement en défaut, mais peut être efficacement remplacée par celle d'Énergie.

III.

14. Nous avons donc donné, des restrictions (a), (b), auxquelles est subordonnée la démonstration du théorème de Helmholtz, un nouvel énoncé (a'), (b') qui a l'avantage de s'appliquer à des cas où l'énoncé habituel n'a pas de sens. Les conditions (a'), (b') présentent la plus grande analogie avec celles qu'a trouvées M. Duhem en cherchant dans quels cas, pour les systèmes dépendant d'un nombre fini de variables, les équations du mouvement admettaient une intégrale des forces vives ([1]). Mieux peut-être que les développements qui précèdent, la démonstration suivante du théorème de Helmholtz met en lumière les raisons de ce parallélisme.

Pour montrer que $\int_c u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est constant, il est nécessaire et suffisant de montrer que $\int_c j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz$ est nul (*voir* Poincaré, *Théorie des tourbillons*, p. 12). Considérons, tout le long de C, un anneau fluide, de section infiniment petite, que nous

Fig. 4.



partagerons par des sections normales à C en éléments 1, 2, ..., n infiniment petits dans leurs trois dimensions et contenant tous la même

([1]) *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IV, p. 5; 1898).

masse dm. Un système matériel étant défini par des variables normales, on sait que, dans un déplacement virtuel quelconque, isotherme ou non, la variation du potentiel thermodynamique interne, *diminuée des termes dus à la variation de température,* est égale au travail des actions extérieures augmenté du travail des forces d'inertie. Écrivons cette égalité pour l'anneau C et pour la modification par laquelle chaque élément vient prendre la place et l'état physique et chimique du suivant, 1 remplaçant 2, ..., n remplaçant 1.

Le potentiel thermodynamique de l'anneau est de la forme

$$\sum_1^n \varphi(\rho, \lambda, T)\, dm + \zeta,$$

ζ ne dépendant pas de la température des éléments 1, 2, ..., n et reprenant la même valeur quand la masse totale du fluide revient au même état. Le premier membre de notre égalité sera donc

$$-\sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial T}\, \delta T\, dm.$$

Les actions extérieures comprennent :

D'abord celles qui sont dues aux corps étrangers au fluide. Leur travail virtuel est, par hypothèse, de la forme

$$\sum_1^n \left[X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z + L_e \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta z \right) \right] dm.$$

Puis les actions exercées sur l'anneau par le reste du fluide. Leur travail $\delta \eta$ est nul parce que toute la masse revient au même état.

Enfin les pressions appliquées à la surface de l'anneau. Leur travail est nul parce que, le fluide étant sans viscosité, elles sont normales aux éléments pressés, c'est-à-dire au chemin parcouru.

Nous devons donc écrire

$$-\sum_1^n \frac{\partial\varphi}{\partial T}\,\delta T\,dm = \sum_1^n \Big[X_e\,\delta x + Y_e\,\delta y + Z_e\,\delta z + L_e\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\Big)\Big]\,dm - \sum_1^n (j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta z)\,dm.$$

On peut évidemment, pour calculer chacun des termes de cette équation, imaginer non plus que chaque élément se substitue au suivant, mais que l'un d'entre eux, 1 par exemple, fait le tour complet de C. Il vient alors

$$-\int_c \frac{\partial\varphi}{\partial T}\,dT = \int_c (X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz + L_e\,d\lambda) - \int_c (j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz).$$

En exprimant que $\int_c (j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz)$ est nul, on retrouve les conditions suffisantes (a') et (b') des nos **7** et **11**. Si elles sont remplies, on peut dire qu'il existe une intégrale des forces vives dans le déplacement virtuel que nous avons considéré pour l'élément 1.

15. Cette démonstration du théorème de Helmholtz n'est que la généralisation d'une méthode indiquée par Lagrange pour trouver les conditions d'équilibre des liquides ([1]). Elle présente deux inconvénients. Elle laisse dans une certaine obscurité la modification virtuelle qu'on y fait subir à l'anneau C; c'est seulement en vertu d'une notion assez confuse de la nature d'un fluide qu'on en aperçoit la possibilité. Elle suppose de plus, sans explication, que la pression est normale à l'élément pressé. A ces points de vue, elle ne saurait donc remplacer

---

([1]) *Mécanique analytique*, 1re Partie, section VII, art. 7.

les développements des nos **1** à **12** : ceux-ci nous ont montré que la direction normale de la pression résulte du fait que le potentiel thermodynamique $\varphi\rho\, d\tau$ dépend de la disposition de la matière autour du point x, y, z par l'intermédiaire de la densité seule. Mais, par contre, elle a l'avantage d'être indépendante de la forme du terme Ψ du no **2** : les hypothèses que nous y avons faites sur $\delta\zeta$ et $\delta\eta$ (qui remplacent ici $\delta\Psi$) découlent, en effet, si directement des principes de la Thermodynamique qu'il paraît difficile de les écarter.

IV.

16. Dans le mouvement des fluides mélangés, M. Duhem a montré que le théorème de Helmholtz s'applique à chaque fluide en particulier, si les actions extérieures admettent un potentiel et si, à tout instant, la température de la masse est uniforme ([1]). Sa démonstration suppose que les divers éléments de la masse fluide n'exercent aucune action l'un sur l'autre. Il est facile de s'affranchir de cette restriction. Prenons, par exemple, deux fluides que nous distinguerons par les indices 1 et 2. Soient ρ la densité du mélange, ρ_1, ρ_2 les densités partielles ($\rho = \rho_1 + \rho_2$), λ_1 et λ_2 deux paramètres quelconques, T la température absolue. Nous écrirons le potentiel thermodynamique

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F} = & \int \varphi(\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathrm{T})\rho\, d\tau \\
& + \frac{1}{2}\int\int \psi(\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, \rho_1', \rho_2', \lambda_1', \lambda_2', x, y, z, x', y', z')\rho\rho'\, d\tau\, d\tau'.
\end{aligned}
$$

On supposera le travail virtuel des actions extérieures de la forme

$$
\begin{aligned}
\delta\mathfrak{E}_e = & \int (\mathrm{X}_{e1}\delta x_1 + \mathrm{Y}_{e1}\delta y_1 + \mathrm{Z}_{e1}\delta z_1 + \mathrm{L}_{e1}\Delta\lambda_1)\rho_1\, d\tau \\
& + \int (\mathrm{X}_{e2}\delta x_2 + \mathrm{Y}_{e2}\delta y_2 + \mathrm{Z}_{e2}\delta z_2 + \mathrm{L}_{e2}\Delta\lambda_2)\rho_2\, d\tau \\
& + \mathbf{S}\, \mathrm{P}[\cos(n, x)\delta x + \cos(n, y)\delta y + \cos(n, z)\delta z]\, d\omega,
\end{aligned}
$$

δx_1, δy_1, δz_1 se rapportant au fluide 1; δx_2, δy_2, δz_2 au fluide 2.

([1]) *Équilibre et mouvement des fluides mélangés*, p. 101.

A la surface, l'expression

$$\cos(n, x)\delta x + \cos(n, y)\delta y + \cos(n, z)\delta z$$

est la même pour les deux fluides [1].

Nous poserons

$$H_1 = \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1},$$

$$H_2 = \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2},$$

$$I_1 = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} \rho' d\varpi',$$

$$I_2 = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} \rho' d\varpi',$$

$$L_{i1} = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} \rho' d\varpi',$$

$$L_{i2} = -\int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2} \rho' d\varpi'.$$

Les équations du mouvement s'obtiendront par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons appliquée plus haut. On arrivera ainsi, pour le fluide 1, aux formules suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = L_{e1} + L_{i1},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(V - \rho I_1)}{\partial x} = X_{e1} + L_{e1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - j_{1x},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial(V - \rho I_1)}{\partial y} = Y_{e1} + L_{e1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - j_{1y},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1}\right)\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial(V - \rho I_1)}{\partial z} = Z_{e1} + L_{e1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - j_{1z},$$

et à des formules analogues pour le fluide 2. ω_1 et ω_2 y désignent des fonctions qui vérifient l'égalité $\omega_1 + \omega_2 = 0$ et que la Thermodynamique est impuissante à déterminer.

---

[1] DUHEM, *Équilibre et mouvement des fluides mélangés*, p. 37.

Si les actions extérieures admettent un potentiel et si, *à tout instant*, la température est uniforme dans la masse, le théorème de Helmholtz est vrai. Il l'est encore si, à tout instant, $\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1}$ est fonction de T seul. Il est malheureusement difficile de voir à quelle réalité physique correspond cet énoncé. Il est, en particulier, difficile de trouver ici le cas qui correspond aux mouvements adiabatiques des fluides isolés. Il n'y a pas lieu d'ailleurs de s'en étonner, la quantité de chaleur dégagée par un élément d'un fluide 1 mélangé à un autre fluide 2 n'étant pas une grandeur définie.

Sur la Géométrie à n dimensions;

Par M. LOVETT.

Dans les spéculations des géomètres sur la Géométrie de l'espace à n dimensions on peut distinguer plusieurs directions, qui cependant se coupent souvent; on signale les catégories suivantes :

1° L'extension directe de la Géométrie de Descartes; cette extension n'est qu'une forme convenable de phraséologie; à ce point de vue l'espace à plusieurs dimensions n'est qu'un ensemble analytique et sa Géométrie n'est qu'une interprétation géométrique de faits et formules analytiques; sous cette forme l'espace à n dimensions provint des esprits de Grassmann, Cayley, Gauss et Cauchy, et il est probable qu'Euler et Lagrange furent familiers avec cette idée;

2° La généralisation des notions et des problèmes de la Géométrie métrique ou projective de l'espace ordinaire; les Mémoires de MM. Jordan, d'Ovidio et Veronese donnent des exemples de ce groupe d'investigations;

3° La transformation des espaces ordinaires visuels à deux ou trois dimensions en multiplicités à dimensions plus hautes ou plus petites en remplaçant le point ou son élément dualistique par d'autres éléments d'espace : par exemple la Géométrie de droites de Plücker, la Géométrie de sphères de Lie, la Géométrie à cinq dimensions de toutes les coniques du plan comme un auxiliaire à la théorie de vis de M. Ball; cette catégorie des géomètres est peut-être la plus concrète;

4° La théorie des correspondances birationnelles entre les ensembles

à n dimensions, ce qui a été l'objet des recherches de MM. Brill, Kantor et Nœther;

5° L'extension des méthodes de la Géométrie différentielle ordinaire aux espaces à plusieurs dimensions; cette classe contient les travaux de Beltrami et Christoffel, de MM. Bianchi, Cesàro et Ricci, et les contributions récentes de M. Darboux et de ses élèves;

6° L'interprétation donnée à la Géométrie à n dimensions par la théorie des groupes continus; dans cette catégorie sont les Mémoires bien connus de Lie, et de MM. Klein et Poincaré;

7° La Géométrie absolue d'espace; ici on trouve la dissertation célèbre de Riemann, les Mémoires de Helmholtz et Lie, et le Traité de M. Veronese;

8° La Géométrie descriptive de l'espace à plusieurs dimensions dont on trouve les éléments dans les travaux de MM. Schlegel, Segre, Stringham et Veronese;

9° La Cinématique des espaces à n dimensions développée dans les Mémoires de Beltrami, Clifford et M. Jordan.

On se propose ici de faire quelques applications de la théorie des groupes continus finis et infinis à la Géométrie de l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

I. — Construction de la Géométrie euclidienne de l'espace à n dimensions.

M. Poincaré a donné une très belle application de la méthode de Lie, en déterminant les Géométries quadratiques à deux dimensions (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 203-215).

Le Chapitre suivant expose la même théorie pour une Géométrie quelconque et construit la Géométrie euclidienne à n dimensions.

Nous allons faire les hypothèses suivantes par rapport à l'espace :

1° Soit l'espace une multiplicité de n dimensions; c'est-à-dire, soient n choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour déterminer la position d'un élément de la multiplicité; ces n choses indépendantes sont nommées les *coordonnées de l'élément;*

2° Soit $\frac{1}{2}n(n+1)$ le nombre de degrés de liberté d'une figure de la multiplicité dans la multiplicité; c'est-à-dire, soient $\frac{1}{2}n(n+1)$

choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour fixer la position d'un corps rigide; ces $\frac{1}{2}n(n+1)$ choses indépendantes sont nommées les *paramètres de la figure*.

Il est convenable de nommer l'élément un *point* et de désigner ses coordonnées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons une figure quelconque qui contient ce point et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ les paramètres de la figure. Soient $x'_2, x'_2, \ldots, x'_n$ les coordonnées de la position nouvelle du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la position nouvelle de la figure. On a

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ \nu = \frac{1}{2}n(n+1). \end{cases}$$

L'opération changeant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ représente un des mouvements d'une figure à n dimensions; l'ensemble de ces opérations forme un groupe continu à $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres. Parmi ces opérations on doit trouver la transformation identique; donc il doit y avoir un système de paramètres tel qu'on ait

$$(2)\qquad \xi_1 = x_1, \qquad \xi_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = x_n.$$

Sans perdre de généralité on peut supposer que ce système particulier de paramètres soit le suivant :

$$(3)\qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0.$$

Une transformation infinitésimale du groupe est une transformation dont les paramètres ne diffèrent que par des quantités infinitésimales des paramètres qui produisent la transformation identique; dans le cas (3) on obtient la transformation infinitésimale en donnant des valeurs infinitésimales aux paramètres; c'est-à-dire, par une telle transformation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont changées en

$$(4)\qquad x_i + \sum_1^\nu \alpha_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \nu = \frac{1}{2}n(n+1).$$

respectivement (dans les dérivées partielles il faut poser les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ égales à zéro).

En écrivant

$$(5) \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le symbole bien connu de la transformation infinitésimale (4) est

$$(6) \qquad \mathrm{I} = \sum_1^n p_i \sum_1^\nu \alpha_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j}$$

ou en posant

$$(7) \qquad \mathrm{J}_i = \sum_1^n p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

une transformation infinitésimale quelconque s'écrit

$$(8) \qquad \mathrm{I} = \sum_1^\nu \alpha_i \mathrm{J}_i.$$

D'après un théorème fondamental de Lie, on a

$$(9) \qquad (\mathrm{J}_i \mathrm{J}_j) = \sum_1^\nu \lambda_{ijk} \mathrm{J}_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où

$$(10) \qquad (\mathrm{J}_i \mathrm{J}_j) = \sum_1^n \left(\frac{\partial \mathrm{J}_i}{\partial p_k} \frac{\partial \mathrm{J}_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{J}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{J}_j}{\partial p_k} \right),$$

et les λ_{ijk} sont des constantes. Il y a $\frac{1}{8}[n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)]$ de ces équations (9), mais les $\frac{1}{16}[n^3(n+1)^3 - 2n^2(n+1)^2]$ quantités λ_{ijk} ne sont pas tout à fait arbitraires, parce que les

$$\tfrac{1}{48}[n^3(n+1)^3 - 6n^2(n+1)^2 + 8n(n+1)]$$

identités de Jacobi

$$(11)\qquad [J_i(J_jJ_k)]+[J_j(J_kJ_i)]+[J_k(J_jJ_i)]=0 \qquad (i,j,k=1,x,\ldots,\nu)$$

ont lieu.

Tous les systèmes de quantités J_i qui satisfont aux équations (9) et (11) donnent des espaces dont les mouvements infinitésimaux indépendants se représentent respectivement par les transformations infinitésimales du système. Les fonctions des éléments qui sont des invariants sous ces transformations fournissent les propriétés caractéristiques de la Géométrie de l'espace. On se propose ici de trouver ces caractéristiques pour un système des transformations.

On vérifie facilement que les formes suivantes des transformations fondamentales $J_1, J_2, \ldots, J_\nu$, savoir

$$(12)\qquad p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad x_ip_j - x_jp_i \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

satisfont aux équations (9) et (11).

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ deux points quelconques et $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ leurs positions après la transformation

$$(13)\qquad I=\sum_1^\nu \alpha_iJ_i$$

où les J_i ont les valeurs (12).

Si la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ est une fonction absolument invariante sous cette opération, on a

$$(14)\qquad I\varphi=0$$

pour toutes les valeurs des α_i; donc pour la détermination de la fonction φ on a le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}&=0\\ x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+x'_i\frac{\partial\varphi}{\partial x'_j}-x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-x'_j\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}&=0 \end{aligned}\right\} \quad (i,j=1,2,\ldots,n).$$

Ce système complet a $\frac{1}{2}n(n+1)$ équations et $2n$ variables. Il n'y a pas de solution si les équations sont indépendantes. Prenons les $2n-1$ équations suivantes du système (15) :

$$(16)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\rho}=0 \qquad (\rho=1, 2, \ldots, n),$$

$$(17)\qquad x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma}-x_\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+x'_1\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\sigma}-x'_\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1}=0 \qquad (\sigma=2, 3, \ldots, n):$$

en multipliant les équations (16) respectivement par

$$l_h^{(ij)}|(x_1-x'_1) \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

où

$$l_1^{ij}=|x_i, x'_j|, \qquad l_i^{ij}=|x_j, x'_i|, \qquad l_j^{ij}=|x_1, x'_i|, \qquad l_k^{ij}=0$$
$$(k=2, 3, \ldots, n; \qquad k\neq i, \qquad k\neq j),$$

et les équations (17) respectivement par

$$\lambda_h^{(ij)}|(x_1-x'_1)| \qquad (h=2, 3, \ldots, n),$$

où

$$\lambda_i^{(ij)}=x'_j-x_j, \qquad \lambda_j^{(ij)}=x_i-x'_i, \qquad \lambda_k^{(ij)}=0$$
$$(k=2, 3, \ldots, n; \qquad k\neq i, \qquad k\neq j);$$

et en ajoutant on obtient les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ équations restantes du système (15), savoir

$$(18)\qquad x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+x'_i\frac{\partial\varphi}{\partial x'_j}-x'_j\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}=0.$$

Le système complet (16) et (17) de $2n-1$ équations avec $2n$ variables a au moins une solution. On vérifie que cette solution est unique en observant qu'il y a un déterminant du $(2n-1)^{\text{ieme}}$ ordre de

la matrice

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
x'_2 - x_2 & x'_1 - x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x'_2 & x'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
x'_3 - x_3 & 0 & x'_1 - x_1 & 0 & \dots & 0 & -x'_3 & 0 & x'_1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \cdot\cdot & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\
x'_n - x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & x'_1 - x_1 & -x'_n & 0 & 0 & 0 & \dots & x'_1
\end{vmatrix}$$

qui n'est pas égal à zéro, savoir le déterminant des $2n-1$ dernières colonnes dont la valeur est $(x_1 - x'_1)^{n-1}$.

Cette solution unique du système (16) et (17) est facile à trouver. En effet les n équations (16) demandent que φ soit une fonction des quantités

$$X_i = x_i - x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En ces variables nouvelles les $n-1$ équations (17) deviennent

$$X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X_j} - X_j \frac{\partial \varphi}{\partial X_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

qui montrent que φ est une fonction de

$$\sum_1^n X^2;$$

donc la fonction

$$(19) \qquad \delta = \sqrt{\sum_1^n (x_i - x'_i)^2}$$

est un invariant absolu sous la transformation la plus générale du groupe (12).

On dit que la fonction δ définit la distance des deux points

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Considérons maintenant la multiplicité linéaire des éléments

$$(20) \qquad x_i + \lambda_i x_1 + \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les variations données aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les transformations (12) sont les suivantes :

Sous p_j,

$$(21) \quad \delta x_j = 1, \qquad \delta x_i = 0, \qquad i \neq j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

Sous $x_i p_j - x_j p_i$,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_i = -x_j, \quad \delta x_j = +x_i, \quad \delta x_k = 0, \quad k \neq i, \quad k \neq j \\ \qquad\qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

En formant les équations

$$(23) \qquad \delta(x_i + \lambda_i x_1 + \alpha_i) = 0$$

on trouve pour les variations des λ_i et α_i les valeurs suivantes :

Sous p_i,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\lambda_j = 0, \quad \delta\alpha_j = -\lambda_j, \quad (i = 1; j = 2, 3, \ldots, n), \\ \delta\lambda_j = 0, \quad \delta\alpha_i = -1, \quad \delta\alpha_j = 0 \\ \qquad (i = 2, 3, \ldots, n; j = 2, 3, \ldots, n); \end{array} \right.$$

sous $x_i p_j - x_j p_i$,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\lambda_i = -\lambda_j, \quad \delta\lambda_j = \lambda_i, \quad \delta\lambda_k = 0 \quad (i \neq 1, j \neq 1), \\ \delta\alpha_i = -\alpha_j, \quad \delta\alpha_j = \alpha_i, \quad \delta\alpha_k = 0 \\ \quad (k = 2, 3, \ldots, n; k \neq i, k \neq j); \\ \delta\lambda_i = \lambda_i^2 + 1, \quad \delta\lambda_k = \lambda_i\lambda_k \\ (i = 2, 3, \ldots, n; j = 1; k \neq 1; k = 2, 3, \ldots, n), \\ \delta\alpha_l = \alpha_i\lambda_l \quad (l = 2, 3, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Les invariants absolus de deux multiplicités linéaires

$$(26)\qquad (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), \quad (\lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n)$$

sont des solutions du système des équations aux dérivées partielles

$$(27)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \sum_2^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}\delta_j\lambda_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\delta_j\alpha_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_i}\delta_j\lambda'_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i}\delta_j\alpha'_i \right) = 0 \\ \left[j = 1, 2, \ldots, \nu = \tfrac{1}{2}n(n+1) \right], \end{array} \right.$$

où les variations δ_j doivent être remplacées successivement par les valeurs (24) et (25).

Il est commode d'arranger les équations (27) de la manière suivante :

Les $n-1$ équations

$$(28)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n);$$

l'équation

$$(29)\qquad \sum_2^n \left(\lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} + \lambda'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} \right) = 0;$$

les $n-2$ équations

$$(30)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j} - \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j} - \alpha_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} \\ \qquad + \lambda'_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \lambda'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_2} + \alpha'_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \alpha'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_2} = 0 \end{array} \right. \qquad (j = 3, 4, \ldots, n);$$

les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ équations

$$(31)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j} - \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i} + \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j} - \alpha_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \\ \qquad\qquad + \lambda'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_j} - \lambda'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_i} + \alpha'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \alpha'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} = 0 \\ \qquad (i = 3, 4, \ldots n;\ j = 2, 3, \ldots, n); \end{array} \right.$$

les $n-1$ équations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda_j^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j}+(\lambda_j'^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j'}+\sum_2^n\left(\lambda_i\lambda_j\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\lambda_j'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i'}\right)\\ &\qquad\qquad+\sum_2^n\left(\alpha_i\alpha_j\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}+\alpha_i'\alpha_j'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i'}\right)=0\\ &\qquad\qquad(i\neq j,\ j=2,3,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

Des équations (24) et (25) on déduit que les variations de λ_1, λ_2, ..., ne contiennent pas les α_1, α_2, ...; est-il donc possible de trouver des fonctions des λ_i et λ_i' qui soient invariantes? Si de telles fonctions

$$\psi(\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n,\lambda_2',\lambda_3',\ldots,\lambda_n')$$

existent, elles doivent être des solutions du système suivant de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations entre $2(n-1)$ variables :

Les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ équations

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_i\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}-\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}-\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i'}=0\\ &(i=3,4,\ldots,n;\ j=2,3,\ldots,n);\end{aligned}\right.$$

les $(n-2)$ équations

$$(34)\quad \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}-\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2}+\lambda_2'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}-\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2'}=0\qquad(j=3,4,\ldots,n);$$

les $n-1$ équations

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda_j^2+1)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}+(\lambda_j'^2+1)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}+\sum_2^n\left(\lambda_i\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i'}\right)=0\\ &\qquad\qquad(i\neq j;\ j=2,3,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

On vérifie qu'il n'y a plus que $2n-3$ équations indépendantes dans ce système en observant que les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ déterminants D du $2(n-1)^{\text{ième}}$ ordre sont zéro, où les déterminants D se forment en

ajoutant les lignes de la suite

$$
(36)\quad \left|\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & -\lambda_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda'_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda'_3 \\
0 & 0 & -\lambda_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda'_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda'_4 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & .. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & .. \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_n & \lambda_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_n & \lambda'_{n-1} \\
0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & -\lambda'_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda'_3 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -\lambda'_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & \lambda'_4 & 0 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . & & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda'_{n-1} & \lambda'_{n-2} & 0 \\
. & . & . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & . & . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
0 & -\lambda_4 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda'_4 & \lambda'_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

successivement à la matrice

$$
(37)\quad \left|\begin{array}{cccccccccccc}
-\lambda_3 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_3 & \lambda'_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
-\lambda_4 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_4 & 0 & \lambda'_2 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . & \ldots & . \\
-\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_2 & -\lambda'_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda'_2 \\
\lambda_2^2+1 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_2\lambda_4 & \lambda_2\lambda_5 & \ldots & \lambda_2\lambda_n & \lambda'^2_2+1 & \lambda'_2\lambda'_3 & \lambda'_2\lambda'_4 & \lambda'_2\lambda'_5 & \ldots & \lambda'_2\lambda'_n \\
\lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2+1 & \lambda_3\lambda_4 & \lambda_3\lambda_5 & \ldots & \lambda_3\lambda_n & \lambda'_2\lambda'_3 & \lambda'^2_3+1 & \lambda'_3\lambda'_4 & \lambda'_3\lambda'_5 & \ldots & \lambda'_3\lambda'_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda_2\lambda_n & \lambda_3\lambda_n & \lambda_4\lambda_n & \lambda_5\lambda_n & \ldots & \lambda_n^2+1 & \lambda'_2\lambda'_n & \lambda'_3\lambda'_n & \lambda'_4\lambda'_n & \lambda'_5\lambda'_n & \ldots & \lambda'^2_n+1
\end{array}\right|
$$

Considérons donc maintenant le système composé des $(2n-3)$ équations (34) et (35) entre les $2(n-1)$ variables $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n$.

Les équations (34) demandent que ψ soit une fonction de

$$
(38)\qquad \xi = \sum_2^n \lambda_i^2, \qquad \eta = \sum_2^n \lambda_i, \qquad \zeta = \sum_2^n \lambda_i \lambda'_i.
$$

Les équations (35) deviennent dans les variables ξ, η, ζ

$$
(39)\quad 2\lambda_j \xi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + 2\lambda'_j \eta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} + (\lambda_j + \lambda'_j)\zeta_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1} = 0 \quad (j = 2, 3, \ldots, n)
$$

où

$$(40) \qquad \xi_1 = \xi + 1, \qquad \eta_1 = \eta + 1, \qquad \zeta_1 = \zeta + 1.$$

De ces équations on déduit

$$(41) \qquad \frac{d\xi_1}{\xi_1} + \frac{d\eta_1}{\eta_1} - 2\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = 0,$$

c'est-à-dire que ψ est une fonction de

$$(42) \qquad \zeta_1^2 \mid \xi_1 \eta_1,$$

où la quantité

$$(43) \qquad \cos^2\theta = \frac{\sum_2^n (\lambda_i \lambda'_i + 1)^2}{\left(\sum_2^n \lambda_i^2 + 1\right)\left(\sum_2^n \lambda_i'^2 + 1\right)}$$

est un invariant absolu sous la transformation la plus générale du groupe (12).

On dit que l'angle θ est l'angle entre les deux multiplicités linéaires.

Il est facile de vérifier sur la matrice (37) que la solution (43) est la solution unique du système (34) et (35).

S'il s'agit de fonctions invariantes des α et des λ, on les trouvera par l'intégration du système composé des équations (28), (29), (30), (31) et (32). En effet, les équations (28) disent que φ est fonction de

$$\rho_i \equiv \alpha_i - \alpha'_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

En écrivant l'équation (29) dans les variables ρ_i on a

$$\sum_2^n \sigma_j \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_j} = 0, \qquad \sigma_j \equiv \lambda_j - \lambda'_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

ce qui demande que φ soit fonction d'un système quelconque

des $(n-1)$ systèmes de $(n-2)$ déterminants

$$\rho_2\sigma_j - \rho_j\sigma_2 \equiv (\rho\sigma)_{2j}, \quad \rho_3\sigma_j - \rho_j\sigma_3 \equiv (\rho\sigma)_{3j}, \quad \ldots, \quad \rho_n\sigma_j - \rho_j\sigma_n \equiv (\rho\sigma)_{nj}$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n).$$

Les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ équations (30) et (31) deviennent les $(n-1)$ suivantes

$$(\rho\sigma)_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial(\rho\sigma)_{kj}} - (\rho\sigma)_{kj}\frac{\partial\varphi}{\partial(\rho\sigma)_{ki}} = 0 \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n);$$

ces équations demandent que φ soit fonction de

$$P \equiv \sum_{2}^{n}{}_{i}\,[(\rho\sigma)_{ki}]^2;$$

d'ailleurs les équations (30) et (31) dans les variables originales nous disent que les λ et λ' entrent dans la fonction φ par des déterminants

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix},$$

et en effet seulement au moyen des formes

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n \end{vmatrix}^2,$$

et

$$R \equiv \sum_{2}^{n}{}_{i}\,(\lambda_i - \lambda'_i)^2;$$

aussi les équations (32) demandent que Q et R entrent par la combinaison

$$Q + R \equiv \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv T.$$

Enfin les équations (32) prennent les formes

$$(\lambda_j + \lambda'_j)\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial P} + T\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right) = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que la solution φ cherchée est une fonction arbitraire de

$$P \mid T:$$

ainsi les $(n-1)$ formes suivantes

$$\Delta_j^2 = \frac{\sum_{2}^{n} {}_{k} \begin{vmatrix} \lambda_j - \lambda'_j, \alpha_k - \alpha'_k \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \dots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2} \qquad (j = 2, 3, \dots, n)$$

sont des fonctions invariantes des paramètres des deux multiplicités linéaires sous la transformation la plus générale du groupe (12).

Quand les deux multiplicités linéaires se coupent, toutes les formes Δ_j sont égales à zéro; réciproquement, si une Δ_j quelconque est égale à zéro, toutes les autres sont égales à zéro et les multiplicités ont un point commun.

Il est clair *a fortiori* qu'on a l'invariant

$$\Delta^2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda'_2 & \lambda_3 - \lambda'_3 & \dots & \lambda_n - \lambda'_n \\ \alpha_2 - \alpha'_2 & \alpha_3 - \alpha'_3 & \dots & \alpha_n - \alpha'_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \dots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

L'analogie entre les formes Δ et Δ_j et l'expression pour la distance de deux droites de l'espace ordinaire est évidente.

On remarque que les notions fondamentales de distance et de direction de l'espace à n dimensions sont introduites au moyen des invariants (19) et (43), la notion de distance par rapport à deux éléments de l'espace, et la notion de direction par rapport à deux multiplicités les plus simples composées d'un nombre une fois infini de ces éléments. Donc on peut dériver toutes les notions secondaires de la Géométrie de l'espace à n dimensions par des extensions successives de ces notions primaires de l'espace ordinaire, et ces extensions sont aussi simples que les extensions du plan à l'espace ordinaire.

II. — Sur la Géométrie des quadriques de l'espace à n dimensions.

Considérons encore le groupe des mouvements euclidiens

$$(44)\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_n,\quad x_i p_j - x_j p_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons vu que la théorie de ce groupe peut donner les notions de la Géométrie euclidienne de l'espace à n dimensions. Pour montrer que cette théorie peut aussi donner les éléments de cette Géométrie, considérons la quadrique

$$(45)\quad S = \sum_1^n \sum a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^n a_{j,n+1} x_j + a_{n+1,n+1} = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

et cherchons les invariants de la quadrique S sous toutes les transformations infinitésimales du groupe (44).

On observe que S est une fonction linéaire et homogène des paramètres a_{mn}; donc les fonctions invariantes cherchées sont des fonctions homogènes de degré zéro et par le théorème d'Euler on a

$$(46)\qquad \sum_1^{n+1} \sum a_{ij} \frac{\partial I}{\partial a_{ij}} = 0.$$

D'ailleurs de la définition d'une fonction invariante absolue on déduit

$$(47)\qquad \delta I = \sum_1^{n+1} \sum \frac{\partial I}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = 0.$$

Si l'on connaît les variations δa_{ij}, les fonctions invariantes se déterminent par l'intégration du système des équations aux dérivées partielles (47); donc il faut chercher les valeurs données aux variations δa_{ij} par les transformations (44). Pour obtenir ces formes on se rappelle que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prennent les accroisse-

ments suivants :

$$(48)\quad \begin{cases} \delta_k x_k = 1, \qquad \delta_k x_j = 0, \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k); \\ \delta_{kl} x_k = -x_l, \qquad \delta_{kl} x_l = x_k, \qquad \delta_{kl} x_j = 0 \\ \quad (j, k, l = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k, j \neq l); \end{cases}$$

où δ_k est un symbole pour la variation donnée par la transformation p_k et δ_{kl} est la variation donnée par la transformation $x_k p_l - x_l p_k$.

En substituant les variations (48) dans la variation totale de S, on obtient :

$$(49)\quad \begin{cases} \delta_k S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j x_i x_j \delta_k a_{ij} + 2 \sum_1^n {}_j (a_{kj} + \delta_k a_{j,n+1}) x_j \\ \qquad\qquad + 2 a_{k,n+1} + \delta_k a_{n+1,n+1} = 0, \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} \delta_{kl} S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j x_i x_j \delta_{kl} a_{ij} + 2 \sum_1^n {}_i (a_{il} x_i x_k - a_{ik} x_i x_l) \\ \qquad + 2 \sum_1^n {}_i x_j \delta_{kl} a_{j,n+1} + 2(a_{l,n+1} x_k - a_{k,n+1} x_l) + \delta_{kl} a_{n+1,n+1} = 0. \end{cases}$$

S'il s'agit du groupe de similitude il faut ajouter la transformation

$$(51)\qquad \sum_1^n {}_i x_i p_i, \qquad \delta_s x_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

et l'équation

$$(52)\quad \begin{cases} \delta_s S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j (2 a_{ij} + \delta_s a_{ij}) x_i x_j \\ \qquad + 2 \sum_1^n {}_j (a_{jn+1} + \delta_s a_{j,n+1}) x_j + \delta_s a_{n+1,n+1} = 0. \end{cases}$$

En comparant les équations (49), (50) et (52) avec l'équation (45) on trouve les équations suivantes pour la détermination des varia-

tions $\delta_k a_{ij}$, $\delta_{kl} a_{ij}$ et $\delta_s a_{ij}$:

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta_k a_{11}}{a_{11}} = \frac{\delta_k a_{12}}{a_{12}} = \ldots = \frac{\delta_k a_{1n}}{a_{1n}} = \frac{\delta_k a_{22}}{a_{22}} = \frac{\delta_k a_{23}}{a_{23}} = \ldots \\ &= \frac{\delta_k a_{nn}}{a_{nn}} = \frac{\delta_k a_{1,n+1} + a_{k1}}{a_{1,n+1}} = \frac{\delta_k a_{2,n+1} + a_{k2}}{a_{2,n+1}} = \ldots \\ &= \frac{\delta_k a_{n,n+1} + a_{kn}}{a_{n,n+1}} = \frac{\delta_k a_{n+1,n+1} + 2a_{k,n+1}}{a_{n+1,n+1}} = \rho_k \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \end{aligned}\right.$$

aussi toutes les quantités suivantes

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta_{kl} a_{ij}}{a_{ij}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n, j \neq k, j \neq l, ij \neq kl); \\ &\frac{\delta_{kl} a_{i,n+1}}{a_{i,n+1}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{il} - a_{ik}}{a_{il}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{ik} + a_{il}}{a_{ik}} \\ &(i = 1, 2, \ldots, n, i \neq k, i \neq l); \\ &\frac{\delta_{kl} a_{kk} + 2a_{kl}}{a_{kk}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{ll} - 2a_{kl}}{a_{ll}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{n+1,n+1}}{a_{n+1,n+1}}, \\ &\frac{\delta_{kl} a_{kl} + a_{ll} - a_{kk}}{a_{kl}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{k,n+1} - a_{l,n+1}}{a_{k,n+1}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{l,n+1} - a_{k,n+1}}{a_{l,n+1}}, \end{aligned}\right.$$

sont égales à

$$(55)\qquad \rho_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n);$$

et toutes les quantités suivantes

$$(56)\quad \frac{\delta_s a_{ij} + 2a_{ij}}{a_{ij}}, \quad \frac{\delta_s a_{j,n+1} + a_{j,n+1}}{a_{j,n+1}}, \quad \frac{\delta_s a_{n+1,n+1}}{a_{n+1,n+1}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

sont égales à σ.

Donc on a les valeurs suivantes des variations cherchées :

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_k a_{ij} = a_{ij}\rho_k, \quad \delta_k a_{i,n+1} = a_{i,n+1}\rho_k - a_{ki}, \\ &\delta_k a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}\rho_k - 2a_{k,n+1} \end{aligned}\right\} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$(58)\quad \left\{\begin{array}{ll} \delta_{kl} a_{ij} = a_{ij}\rho_{kl}, & \delta_{kl} a_{i,n+1} = a_{i,n+1}\rho_{kl}, \\ \delta_{kl} a_{ik} = a_{ik}\rho_{kl} - a_{il}, & \delta_{kl} a_{il} = a_{il}\rho_{kl} + a_{ik} \\ \multicolumn{2}{c}{(i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq k, i \neq l, ij \neq kl);} \\ \delta_{kl} a_{kk} = a_{kk}\rho_{kl} - 2a_{kl}, & \delta_{kl} a_{kl} = a_{kl}\rho_{kl} + a_{kk} - a_{ll}, \\ \delta_{kl} a_{ll} = a_{ll}\rho_{kl} + 2a_{kl}, & \delta_{kl} a_{k,n+1} = a_{k,n+1}\rho_{kl} - a_{l,n+1}, \\ \delta_{kl} a_{l,n+1} = a_{l,n+1}\rho_{kl} + a_{k,n+1}, & \delta_{kl} a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}\rho_{kl}; \end{array}\right.$$

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta_s a_{ij} = a_{ij}\sigma - 2a_{ij}, \\ \delta_s a_{j,n+1} = a_{j,n+1}\sigma - a_{j,n+1}, \\ \delta_s a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}\sigma \end{array}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En mettant les valeurs (57) dans l'équation (47) on a

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_1^n \sum a_{ij}\rho_k \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ij}} + \sum_1^n (a_{i,n+1}\rho_k - a_{ki}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}} \\ \qquad + (a_{n+1,n+1}\rho_k - 2a_{k,n+1}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{n+1,n+1}} = 0; \end{array}\right.$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (46),

$$(61)\quad \sum_1^n a_{ij} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}} + 2a_{j,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{n+1,n+1}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

de la même manière on tire des équations (47), (58) et (59) :

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_1^n \left(a_{ik} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{il}} - a_{il} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ik}}\right) - 2a_{kl}\left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{kk}} - \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ll}}\right) \\ \quad + (a_{kk} - a_{ll}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{kl}} - a_{l,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{k,n+1}} + a_{k,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{l,n+1}} = 0 \\ \qquad (i \neq k, i \neq l, k, l = 1, 2, \ldots, n); \end{array}\right.$$

$$(63)\quad \sum^n \sum a_{ij} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ij}} + \sum_1^n \left(a_{ii} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ii}} + a_{i,n-1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}}\right) = 0.$$

Les équations (61), (62) et (46) forment un système de $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ équations avec $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ variables; donc le système a au moins n solutions indépendantes. On vérifie que le nombre des solutions indépendantes est exactement égal à n en construisant la matrice de tous les coefficients et en observant que, parmi tous les déterminants du $\frac{1}{2}(n^2+n+2)^{\text{ième}}$ ordre de la matrice, on trouve un déterminant au moins qui n'est pas égal à zéro, parce que le terme $a_{n+1,n+1}$ paraît une fois seulement et un de ses coefficients n'est pas égal à zéro.

En effectuant l'intégration du système on trouve que les formes suivantes

$$(64)\quad \begin{cases} \Delta = |a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}|, \qquad \mathrm{D} = |a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, a_{n+1,n+1}|, \\ \mathrm{J}_k = \sum_{1}^{n}{}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} |a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2}, \ldots, a_{i_k i_k}| \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

sont $n+1$ solutions indépendantes des équations (61) et (62); pour satisfaire à l'équation (46) il faut et il suffit de prendre les n formes indépendantes suivantes :

$$(65)\quad \mathrm{I}_1 = \frac{\mathrm{J}_{n-1}\mathrm{D}}{\Delta^2}, \quad \mathrm{I}_2 = \frac{\mathrm{J}_{n-2}\mathrm{D}^2}{\Delta^3}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{n-1} = \frac{\mathrm{J}_1\mathrm{D}^{n-1}}{\Delta^n}, \quad \mathrm{I}_n = \frac{\mathrm{D}^n}{\Delta^{n+1}}.$$

En notant que ces invariants sont des invariants absolus, on trouve l'interprétation géométrique suivante des formes. Prenons la quadrique

$$(66)\quad \sum_{1}^{n} x_i^2 \,|\, \alpha_i^2 - 1 = 0;$$

on a

$$(67)\quad \begin{cases} \mathrm{D} = -\Delta = \sum_{1}^{n} 1 \,|\, \alpha_i^2; \\ \mathrm{I}_1 = -\sum_{1}^{n} \alpha_i^2, \qquad \mathrm{I}_2 = \sum_{1}^{n} \sum \alpha_i^2 \alpha_j^2 \quad (i \neq j), \quad \ldots, \\ \mathrm{I}_n = \pm \alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2, \end{cases}$$

suivant que n est pair ou impair; c'est-à-dire que les carrés des demi-axes de la quadrique sont des racines de l'équation

$$(68) \qquad x^n + I_1 x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \ldots + I_{n-1} x + I_n = 0;$$

où les carrés des demi-axes de la quadrique (45) sont donnés par la résolution de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré :

$$(69) \qquad I_{n+1}^n + \sum_1^{n-1} {}_i I_n^i I_i I_{n+1} x^i + I_n x^n = 0.$$

Une discussion des racines de cette équation aurait pour conséquence une classification des quadriques.

Pour construire les invariants de la quadrique S sous le groupe de similitude il faut et il suffit d'introduire les quantités (67) dans l'équation (63) comme des variables nouvelles, ce qui donne les $n-1$ intégrales

$$(70) \qquad \frac{I_{n-1}^i I_i}{\Delta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On vérifie facilement que ces expressions déterminent les rapports des axes de la quadrique.

Les invariants (65) constituent les *criteria* de la congruence des quadriques et les invariants (70) contiennent la théorie de la similitude pour quadriques.

On se permet de remarquer que les axes de la quadrique (45) sont n solutions indépendantes des équations (46), (61), (62), et que les rapports des axes sont $n-1$ solutions indépendantes du système composé des équations (46), (61), (62), (63).

Les discussions qui précèdent s'occupent d'applications des groupes de mouvements et de similitude; tous les deux groupes sont projectifs: de la même façon la théorie du groupe projectif général donne la Géométrie projective de l'espace à n dimensions et en particulier la théorie des invariants projectifs de quadriques et de systèmes de quadriques. On peut généraliser l'étude de plusieurs manières dont on

signale les deux suivantes : 1° en considérant les groupes de transformations ponctuelles plus générales ; 2° en introduisant les transformations de contact, et étudiant en particulier les généralisations de la transformation ponctuelle projective.

Considérons ce cas particulier. On rappelle les propriétés suivantes du groupe projectif général :

1° Les formes finies de ses transformations sont

$$(71) \qquad x'_i = \frac{\sum_1^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i}{\sum_1^n \alpha_j x_j + \beta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et ses transformations infinitésimales sont

$$(72) \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad x_i p_j, \qquad x_i \sum_1^n x_j p_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

2° Toutes les transformations du groupe changent les lignes droites en lignes droites ;

3° La famille de tous les plans de l'espace est invariante sous toutes les transformations du groupe.

Proposons-nous de trouver les transformations de contact qui possèdent l'une ou l'autre de ces propriétés.

1° Existe-t-il des transformations de contact de la forme

$$(73) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_i &= \frac{\sum_1^n a_{ij} x_j + \sum_2^n b_{ij} p_j + c_i}{\sum_1^n \alpha_j x_j + \sum_2^n \beta_j p_j + \gamma} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ p'_j &= \frac{\sum_1^n e_{jk} x_k + \sum_1^n f_{jk} p_k + g_j}{\sum_1^n \alpha_k x_k + \sum_1^n \beta_k p_k + \gamma} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n); \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, existe-t-il des transformations de cette forme qui laissent invariante l'équation de Pfaff

$$(74)\qquad dx_1 - \sum_2^n p_i\,dx_i = 0\,?$$

On peut résoudre cette question en déterminant les transformations ponctuelles projectives de l'espace à $2n-1$ dimensions

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n;\ x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1})$$

qui laissent invariante l'équation de Pfaff

$$(75)\qquad P \equiv dx_1 - \sum_2^n x_{n+i-1}\,dx_i = 0.$$

Il est plus commode d'opérer avec les transformations infinitésimales. La transformation infinitésimale la plus générale du groupe projectif de l'espace ponctuel à $2n-1$ dimensions est

$$(76)\qquad \sum_1^{2n-1} \varepsilon_i p_i + \sum_1^{2n-1}\sum \varepsilon_{ij} x_j p_j + \sum_1^{2n-1} \varepsilon'_i x_i \sum_1^{2n-1} x_j p_j$$

où

$$(77)\qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et les quantités ε_i, ε_{ij}, ε'_i sont des constantes arbitraires.

Les variations des coordonnées ponctuelles sous la transformation (76) sont

$$(78)\qquad \delta x_k = \varepsilon_k + \sum_1^{2n-1} \varepsilon_{ik} x_i + x_k \sum_1^{2n-1} \varepsilon'_i x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

La condition définissante est

$$\delta P = \rho P = 0,$$

ou

$$(79) \qquad d\,\delta x_1 - \sum_2^n x_{n+i-1}\, d\,\delta x_i - \sum_2^n \delta x_{n+i-1}\, dx_i = \rho \mathrm{P};$$

ce qui devient, en vertu des équations (78),

$$(80) \qquad \sum_1^n \mathrm{L}_i dx_i + \sum_{n+1}^{2n-1} \mathrm{M}_i dx_i = \rho\left(dx_1 - \sum_2^n x_{n+i-1}\, dx_i\right),$$

où

$$(81) \quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}_1 = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon'_1 x_1 + \sum_2^{2n-1} \varepsilon'_i x_i - \sum_2^n \varepsilon_{1i} x_{n+i-1} - \sum_2^n \varepsilon'_1 x_i x_{n+l-1},\\ &\mathrm{L}_k = \varepsilon_{k1} - \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon'_k x_1 - \sum_1^{2n-1} \varepsilon_{i,n+k-1} x_i\\ &\qquad - \sum_2^n x_{n+i-1}(\varepsilon_{ki} + \varepsilon'_k x_i) - 2\varepsilon_{n+k-1} \sum_1^{2n-1} t'_i x_i\\ &\qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n);\\ &\mathrm{M}_l = \varepsilon_{l1} + \varepsilon'_l x_1 - \sum_2^n \varepsilon_{li} x_{n+i-1} - \sum_2^n \varepsilon'_l x_i x_{n+i-1}\\ &\qquad\qquad (l = n+1, n+2, \ldots, 2n-1). \end{aligned}\right.$$

Donc

$$(82) \quad \mathrm{L}_1 = \rho, \quad \mathrm{L}_2 = -x_{n+1}\rho, \quad \mathrm{L}_3 = -x_{n+2}\rho, \quad \ldots, \quad \mathrm{L}_n = -x_{2n-1}\rho,$$

et

$$(83) \qquad \mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_{n+2} = \ldots = \mathrm{M}_{2n-1} = 0.$$

Des équations (83) on déduit

$$(84) \quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = n+1, n+2, \ldots, 2n-1),\\ &\varepsilon'_{n+1} = \varepsilon'_{n+2} = \ldots = \varepsilon'_{2n-1} = 0; \end{aligned}\right.$$

donc la transformation ponctuelle projective (76) de l'espace à $2n-1$

dimensions $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1})$, qui laisse invariante l'équation de Pfaff (75), est aussi une transformation ponctuelle projective de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2° Les transformations de contact de l'espace à n dimensions qui transforment les lignes droites en lignes droites sont bien connues. Elles consistent en des transformations dualistiques et projectives.

3° On trouve que les transformations de contact les plus générales de l'espace à $n+1$ dimensions qui transforment les plans en des plans sont définies par les équations

$$(85)\quad \begin{cases} x'_i = \dfrac{\sum\limits_{0}^{n} i\, x_j(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_n, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})_{j+1}}{\sum\limits_{0}^{n} i\, x_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)_{j+1}} \\ \qquad (x_0 = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n), \\ p'_i = \varphi_i\left(\sum\limits_{1}^{n} p_j x_j - z, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \varphi_i(\zeta_1, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ z' = \sum\limits_{1}^{n} i\, \varphi_j x'_j - \varphi_0, \end{cases}$$

où les fonctions φ_i sont arbitraires et les expressions

$$(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)_j$$

sont les mineurs de m_j dans le déterminant

$$\left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial p_{n-1}}, \quad m_{n+1} \right|.$$

Ces transformations sont équivalentes aux produits

DPD

où D est la transformation dualistique et P est une transformation ponctuelle arbitraire.

Donc la Géométrie de cette catégorie de transformations de contact se déduit de l'étude de la Géométrie du groupe infini des transformations ponctuelles de l'espace à $n+1$ dimensions.

III. — Sur la Géométrie différentielle de l'espace à n dimensions.

Dans un Mémoire *Sur les quantités fondamentales de la théorie générale des surfaces* (*Rozprawy* de l'Académie des Sciences de Cracovie, série II, t. VIII; *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, p. 697; 1895), M. Zorawski considère le groupe de mouvements euclidiens de l'espace x, y, z; construit les extensions de ces transformations par rapport à toutes les dérivées de x, y, z par rapport à deux variables indépendantes u, v; détermine les invariants différentiels du groupe prolongé; et établit les théorèmes suivants de la théorie des surfaces : 1° *tous les invariants différentiels sont des fonctions des quantités fondamentales* E, F, G, L, M, N *du premier et du second ordre et de leurs dérivées;* 2° *entre* E, F, G, L, M, N *et leurs dérivées existent trois relations différentes;* 3° *il n'y a pas de relation entre* E, F, G *et leurs dérivées.*

Nous avons déterminé l'invariant

$$\sqrt{\sum_1^n (x_i - x_i')^2} \tag{86}$$

sous le groupe

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad x_i p_j - x_j p_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{87}$$

On appelle la forme différentielle correspondante

$$ds^2 = \sum_1^n dx_i^2 \tag{88}$$

l'*élément linéaire* de l'espace.

Les équations

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

où les $n-1$ quantités $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont des paramètres indépendants, définissent une surface de l'espace. On a

$$(90) \qquad ds^2 = \sum_1^{n-1}{}_i \sum{}_j E_{ij}\, du_i\, du_j \qquad (E_{ij} = E_{ji}),$$

où

$$(91) \qquad E_{ij} = \sum_1^{n}{}_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}.$$

Ces quantités E_{ij} jouent un rôle capital dans la théorie des invariants différentiels du groupe de mouvements, et en ceci on trouve le secret du succès de ces coordonnées gaussiennes généralisées.

En comptant les variations de toutes les dérivées partielles de toutes les coordonnées par rapport aux arguments $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, sous l'hypothèse que ces arguments ne changent pas sous les transformations, on a le système suivant d'équations linéaires aux dérivées partielles pour la détermination des invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre :

$$(92) \qquad P_1^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad P_2^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad P_n^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$(93) \qquad P_{\alpha\beta}^m f \equiv S\left(x_{\alpha, u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{\beta, u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}}} - x_{\beta, u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha, u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}}} \right) = 0,$$

où

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n;$$

$$S = \sum_0^{m}{}_{i_1} \sum_0^{m-i_1}{}_{i_2} \sum_0^{m-i_1-i_2}{}_{i_3} \cdots \sum_0^{m-i_1-\ldots-i_{n-2}}{}_{i_{n-1}} \qquad (i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} > 0).$$

Les équations (92) montrent que les invariants différentiels sont indépendants des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; donc on considère seulement les équations (93).

Si $m = 1$, on a $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations et $n(n-1)$ variables dans le système (93). Les équations sont indépendantes et l'on trouve sans

difficulté les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions indépendantes

$$(94)\qquad E_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En posant $m = 2$, on a un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations indépendantes et $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ variables, ce que l'on vérifie facilement en notant que n fonctions de $n-1$ variables indépendantes ont

$$(95)\qquad \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-3)(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}$$

dérivées partielles du $m^{\text{ième}}$ ordre; donc on doit trouver $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ solutions indépendantes du système (93) pour $m=2$.

En effet on a les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions (94) et $\frac{1}{2}n(n-1)^2$ solutions de la forme

$$(96)\qquad E_{ij_{u_k}} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Considérons la matrice

$$(97)\qquad \begin{Vmatrix} x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & x_{3_{u_1}} & \ldots & x_{n_{u_1}} \\ x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & x_{3_{u_2}} & \ldots & x_{n_{u_2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & x_{3_{u_{n-1}}} & \ldots & x_{n_{u_{n-1}}} \end{Vmatrix}$$

et soient

$$(98)\qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n$$

les déterminants formés en supprimant chaque colonne successivement; soient encore

$$(99)\qquad X_i\Delta = m_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$(100)\qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1,n-1} \\ E_{21} & E_{22} & \ldots & E_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ E_{n-1,1} & E_{n-1,2} & \ldots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix};$$

enfin les $\frac{1}{2}n(n-1)$ quantités

$$(101)\qquad F_{\alpha\beta} = \sum_{1}^{n} {}_i X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-1),$$

sont des solutions du système

$$(102)\qquad P_{\alpha\beta}^2 f = 0.$$

On voit que les invariants

$$(103)\qquad E_{ij_{u_k}},\quad F_{\alpha\beta}$$

sont indépendants en employant un artifice utilisé par M. Zorawski (*loc. cit.*) dans le cas des quantités fondamentales de Gauss de l'espace ordinaire. On peut arranger ces $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ fonctions de $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ variables en un tel ordre que le déterminant de leurs dérivées partielles du second ordre devient

$$D = \begin{vmatrix}
x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \ldots & x_{n_{u_1}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \ldots & x_{n_{u_2}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \ldots & x_{n_{u_{n-1}}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
X_1 & X_2 & \ldots & X_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \ldots & x_{n_{u_1}} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \ldots & x_{n_{u_2}} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \ldots & x_{n_{u_{n-1}}} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \ldots & x_{n_{u_1}} \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \ldots & x_{n_{u_2}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \ldots & x_{n_{u_{n-1}}} \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & X_1 & X_2 & \ldots & X_n
\end{vmatrix}.$$

Mais on a

$$(104) \quad D = \left| x_{1_{u_1}}, x_{2_{u_2}}, \ldots, x_{n-1_{u_{n-1}}}, X_n \right|^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \text{multiple de } \Delta;$$

donc

$$D \neq 0;$$

c'est-à-dire toutes les dérivées $x_{j_{u_k u_l}}$ sont égales à zéro, ce qui est impossible.

Pour $m = 3$, on a un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations et

$$\tfrac{1}{6}n(n-1)(n^2+4n+6)$$

variables; donc il y a $\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)(n+3)$ solutions indépendantes. On a les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions (94) et les $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ solutions (96) et (101), un ensemble de $\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$ solutions. Il est aisé de montrer que les $\frac{1}{4}n(n-1)^2(n+2)$ expressions suivantes

$$(105) \qquad E_{ij_{u_k u_l}}, \quad F_{ij_{u_m}} \qquad (i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sont des solutions du système

$$(106) \qquad P^{(3)}_{\alpha\beta} f = 0.$$

En notant que

$$(107) \quad E_{li_{u_j u_k}} = x_{1_{u_l}} x_{1_{u_j u_i u_k}} + \ldots \qquad F_{ij_{u_k}} = X_1 x_{1_{u_i u_j u_k}} + \ldots,$$

on peut trouver parmi les $\frac{1}{4}n(n-1)^2(n+2)$ solutions (105) un système de $\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$ solutions qui sont indépendantes, parce que le déterminant des coefficients des dérivées partielles $x_{l_{u_i u_j u_k}}$ dans ces $\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$ formes est un multiple du déterminant Δ.

Ainsi, on doit avoir $\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n+3)$ relations qui contiennent $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ des quantités $F_{ij_{u_m}}$ et $\frac{1}{12}n(n-1)^2(n-2)$ des formes $E_{ij_{u_k u_l}}$.

Dans le cas de l'espace ordinaire, ces relations sont d'autres formes, données par M. Zorawski (*loc. cit.*), des trois équations différentielles bien connues entre les six quantités fondamentales E, F, G, L, M, N de Gauss

$$
(108)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{LN}-\mathrm{M}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}=\mathrm{K},\\
&\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\mathrm{M}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\mathrm{N}=\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\mathrm{L}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\mathrm{M},\\
&\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\mathrm{L}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\mathrm{M}=\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\mathrm{M}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\mathrm{N}.
\end{aligned}\right.
$$

Si $n = 4$, nous avons les solutions indépendantes suivantes :

$$
(109)\quad \left\{
\begin{array}{l}
11_{11}\ \ 11_{12}\ \ 11_{22}\ \ 11_{13}\ \ 11_{23}\ \ 12_{11}\ \ 12_{22}\ \ 12_{23}\ \ 13_{11}\ \ 13_{31}\\
13_{23}\ \ 13_{33}\ \ 21_{13}\ \ 22_{11}\ \ 22_{12}\ \ 22_{13}\ \ 22_{22}\ \ 22_{23}\ \ 22_{33}\ \ 23_{31}\\
23_{33}\ \ 32_{11}\ \ 32_{12}\ \ 32_{22}\ \ 32_{23}\ \ 33_{11}\ \ 33_{12}\ \ 33_{23}\ \ 33_{31}\ \ 33_{33}\\
\qquad 11_{1}\ \ 11_{2}\ \ 11_{3}\ \ 12_{2}\ \ 12_{3}\ \ 22_{2}\ \ 22_{3}\ \ 23_{3}\ \ 33_{1}\ \ 33_{3}
\end{array}\right.
$$

et les équations suivantes pour les dérivées restantes :

$$
(110)\quad \left\{
\begin{array}{l}
2(12_{12})-11_{22}-22_{11}=\varphi_1,\qquad 2(23_{23})-22_{33}-33_{22}=\varphi_2,\qquad 2(31_{31})-33_{11}-11_{33}=\varphi_3,\\
\qquad 12_{13}-13_{12}=\varphi_4,\qquad 12_{23}-13_{22}=\varphi_5,\qquad 12_{33}-13_{23}=\varphi_6,\\
11_{2}-12_{1}=\psi_1,\qquad 11_{3}-31_{1}=\psi_2,\qquad 12_{2}-22_{1}=\psi_3,\qquad 12_{3}-23_{1}=\psi_4,\\
12_{3}-31_{2}=\psi_5,\qquad 22_{3}-23_{2}=\psi_6,\qquad 23_{3}-33_{2}=\psi_7,\qquad 33_{1}-31_{3}=\psi_8,
\end{array}\right.
$$

où

$$
(111)\qquad ij_{kl}=\mathrm{E}_{ij_{u_k u_l}},\qquad ij_{k}=\mathrm{F}_{ij_{u_k}},
$$

et les fonctions φ_i et ψ_i sont fonctions des invariants du premier et du second ordre. On peut déterminer facilement les formes explicites de ces équations; elles sont les généralisations des équations (108) de Gauss, Mainardi et Codazzi entre les quantités gaussiennes E, F, G, L, M, N.

Pour $n = 5$, il faut ajouter aux équations précédentes (110) les

équations suivantes :

$$
(112)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
2(14'_{14}) - 11_{44} - 44'_{11} = \varphi_7, & 2(24'_{24}) - 22_{44} - 44'_{22} = \varphi_8, & 2(34'_{34}) - 33_{44} - 44'_{33} = \varphi_9, & \\
12_{14} - 14'_{12} = \varphi_{10}, & 12_{24} - 14'_{22} = \varphi_{11}, & 13_{14} - 14'_{13} = \varphi_{12}, & 13_{44} - 14'_{34} = \varphi_{13}, \\
13_{34} - 14'_{33} = \varphi_{14}, & 13_{24} - 14'_{23} = \varphi_{15}, & 14'_{24} - 12_{44} = \varphi_{16}, & 23_{24} - 24'_{23} = \varphi_{17}, \\
13_{24} - 12_{34} = \varphi_{18}, & 23_{34} - 24'_{33} = \varphi_{19}, & 24'_{34} - 23_{44} = \varphi_{20}; & \\
14'_{1} - 11_{4} = \psi_9, & 14'_{2} - 12_{4} = \psi_{10}, & 14'_{3} - 13_{4} = \psi_{11}, & 24'_{1} - 21_{4} = \psi_{12}, \\
24'_{2} - 22_{4} = \psi_{13}, & 24'_{3} - 23_{4} = \psi_{14}, & 32_{4} - 23_{4} = \psi_{15}, & 34'_{1} - 31_{4} = \psi_{16}, \\
34'_{2} - 32_{4} = \psi_{17}, & 34'_{3} - 33_{4} = \psi_{18}, & 44'_{2} - 42_{4} = \psi_{19}, & 44'_{3} - 43_{4} = \psi_{20}.
\end{array}
\right.
$$

Ainsi de suite pour une valeur quelconque de n.

Considérons maintenant les invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre. Il est clair qu'on peut obtenir des invariants du $m^{\text{ième}}$ ordre en différentiant les invariants du $(m-1)^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux u_1, u_2, ..., u_{n-1}, parce que, par hypothèse, ces quantités ne changent pas sous les transformations considérées.

On a dans chaque cas $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations linéaires aux dérivées partielles à intégrer; pour le cas des invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre, le nombre de variables est égal à

$$\sum_1^m {}_j \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+j-3)(n+j-2)}{1.2\ldots j},$$

et le nombre des solutions indépendantes est égal à

$$\sum_1^m {}_j \frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+j-2)}{1.2\ldots j} + \frac{n(n^2-1)}{2};$$

on a

$$\sum_3^{m-1} {}_j \frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+j-2)}{1.2\ldots j} + \frac{n(n^2-1)}{2}$$

invariants différentiels du $(m-1)^{\text{ième}}$ ordre; donc il suffit d'en trouver

$$\frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots m}$$

du $m^{\text{ième}}$ ordre.

On obtient des invariants du $m^{\text{ième}}$ ordre en différentiant les formes E_{ij} $(m-1)$ fois et les formes F_{ij} $(m-2)$ fois; de cette différentiation on déduit

$$\frac{n^2(n-1)^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-4)(n+2m-4)}{1.2\ldots(m-1)}$$

invariants. Donc il y a

$$N = \frac{(m-2)n(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-4)(n-2)(n+2m-3)}{2.1.2.3\ldots m}$$

relations entre ces quantités du $m^{\text{ième}}$ ordre. Ces relations peuvent s'obtenir de la manière suivante. On a déjà trouvé, dans le cas $m=3$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{2.1.2.3}$$

relations; en différentiant ces relations $(m-3)$ fois de

$$\frac{1.2.3.n(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)\ldots(n+m-4)(n+2m-3)(m-2)}{1.2.3\ldots m}$$

manières on obtient N relations, qui sont les liaisons cherchées. D'ailleurs, l'opération est toujours possible pour toutes les valeurs de m et n, parce que le nombre des opérations est toujours moindre que

$$M-1 = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-5)}{1.2.3\ldots(m-3)} - 1,$$

où M est le nombre maximum des dérivées du $(m-3)^{\text{ième}}$ ordre d'une fonction à $(n-1)$ variables.

La Géométrie de l'espace ordinaire est unique; l'espace à trois dimensions est le seul espace pour qui ces deux nombres M et N sont égaux, si l'on ne considère pas les espaces à dimensions fractionnelles ou négatives; la valeur commune pour l'espace ordinaire est $m-3$ et les nombres sont égaux pour toutes les valeurs de m.

Nous avons prolongé le groupe de mouvements de l'espace à $n+1$ dimensions par rapport aux dérivées partielles de ses coordonnées ponctuelles par rapport à n paramètres indépendants, sous l'hypothèse que

les transformations laissent ces paramètres absolument invariants. De la même manière, on peut se proposer de prolonger le groupe par rapport à q paramètres indépendants, où q peut prendre les valeurs 1, 2, ..., n. De cette façon, on construit les éléments d'une Géométrie des variétés à un nombre quelconque de dimensions dans l'espace à $n-1$ dimensions, mais, il faut le dire, avec assez de difficulté, car chaque valeur de q demande une nouvelle extension du groupe et, dans chaque cas particulier, il faut étudier l'indépendance et faire l'intégration des systèmes complets. Cependant, il est simple de généraliser la théorie de l'analyse intrinsèque des courbes, ce que l'on donnera dans une Note prochaine. Ce cas correspond à la valeur 1 de q. L'extension correspondante du groupe de mouvements devient

$$(113)\quad p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, \quad x_i p_j - x_j p_i + \sum_1^m {}_k (x_i^{(k)} p_j^{(k)} - x_j^{(k)} p_i^{(k)})$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

où

$$(114)\qquad x_i^{(k)} = \frac{d^k x_i}{dt^k}, \qquad p_j^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial x_j^{(k)}},$$

et t est une variable auxiliaire qui ne change pas sous les transformations du groupe de mouvements euclidiens.

Si l'on prend, en particulier,

$$n = 3, \qquad m = 3, \qquad t = s,$$

où s est l'élément d'arc, on trouvera, entre les invariants absolus, les fonctions suivantes des courbures de la courbe [*voir* le Mémoire de M. Pirondini sur les courbes à triple courbure (*Journal de Battaglini;* 1890)] :

$$(115)\quad \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2, \quad \sum_1^4 {}_i \left(\frac{dX_i}{ds}\right)^2, \\ \displaystyle\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right) \sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^3 x_i}{ds^3}\right)^2 - \left[\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2\right]^3 - \left(\sum_1^4 \frac{d^2 x_i}{ds^2} \frac{d^3 x_i}{ds^3}\right)^2, \end{array} \right.$$

où

$$X_i = \frac{X'_i}{\sum_1^4 X_i'^2}$$

et X'_j est le mineur de x_j dans le déterminant wronskien

$$\left| x_1, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{d^2 x_3}{ds^2}, \quad \frac{d^3 x_4}{ds^3} \right|.$$

IV. — Sur les invariants de déformation de l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Dans un Mémoire sur les invariants de déformation (*Acta Mathematica*, t. XVI), M. Zorawski a donné une belle application de la méthode de Lie à la détermination des invariants de déformation des surfaces dans l'espace ordinaire euclidien. Il s'agit de quantités qui ne changent pas lorsqu'on déforme une surface, telles que la courbure totale de Gauss, les paramètres différentiels de Beltrami, ou la courbure géodésique de Minding. De telles quantités ne doivent dépendre de la forme de la surface que par les coefficients E, F, G de l'élément linéaire. De plus, elles ne doivent pas être altérées par un changement de coordonnées curvilignes. La surface étant rapportée à des coordonnées curvilignes, effectuons, sur ces coordonnées, un changement de variables quelconque. En calculant les nouvelles valeurs de E, F, G, les transformations ainsi définies seront celles d'un certain groupe infini qu'on peut appeler le *groupe de Gauss*. Si, en même temps que les coefficients E, F, G, on exprime, en fonction des nouvelles variables, une ou plusieurs fonctions du point, on obtient des transformations dont l'ensemble sera un groupe de Beltrami, car c'est à de pareilles transformations que se rapportent les paramètres différentiels de cet auteur. Les transformations qui s'appliquent aux quantités E, F, G et à l'équation d'une courbe tracée sur la surface forment un troisième groupe, le *groupe de Minding*. Enfin, en faisant entrer en ligne de compte, à la fois, des coefficients de l'élément linéaire, des

fonctions du point, et des équations de courbes, on a le groupe général.

Les quantités cherchées sont les invariants différentiels de ces groupes, et, pour les rechercher, on devra, d'après la méthode de Lie, prolonger les groupes et déterminer les invariants des groupes ainsi prolongés. Une transformation infinitésimale quelconque étant effectuée sur les coordonnées curvilignes, on calcule facilement les changements infiniment petits de E, F, G, ce qui donne la transformation infinitésimale la plus générale du groupe de Gauss. Considérant ensuite une fonction dont l'accroissement infinitésimal est connu, on détermine les accroissements de ses différentes dérivées. Ces résultats permettent de former les transformations infinitésimales des groupes de Gauss, de Beltrami, de Minding et du groupe général prolongés.

On peut, dès lors, écrire les systèmes complets auxquels doivent satisfaire les invariants différentiels des différents ordres. Pour calculer effectivement les invariants demandés, il faut procéder à l'intégration des systèmes complets. Appliquant cette méthode à la recherche des invariants les moins élevés, M. Zorawski retrouve comme invariant gaussien la courbure totale, comme invariants de Beltrami les paramètres différentiels connus, comme invariant de Minding la courbure géodésique.

Les résultats précédents sont susceptibles d'une multiple généralisation. L'objet de cette Note est de construire le mécanisme nécessaire et suffisant pour déterminer les invariants de déformation de variétés dans un espace ponctuel à un nombre quelconque de dimensions (dans les cas où une déformation est possible, on se rappelle le théorème de Beez), et, en particulier, on se propose de montrer que la théorie de déformation des surfaces de l'espace ordinaire, tous ses invariants et tous ses théorèmes s'appliquent immédiatement aux surfaces d'un espace quadratique quelconque, euclidien ou non euclidien, à trois dimensions, c'est-à-dire qu'on retrouve la théorie des formes différentielles quadratiques. Ce résultat particulier est intéressant; il constitue une contribution de la théorie des groupes continus infinis à la Géométrie des variétés à trois dimensions, et en face du fait que la théorie des groupes finis a une application limitée à la construction des Géométries des variétés à trois dimensions, ce qu'on voit par les travaux

récents de M. Bianchi (*Memorie* de la Société italienne des Sciences, 3e série, t. XI) et de M. Cotton (*Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris*), où l'on trouve la détermination complète de toutes les variétés à trois dimensions dont l'élément linéaire peut admettre un groupe continu de transformations.

On s'occupe ici naturellement à faire la $m^{\text{ième}}$ prolongation d'une transformation infinitésimale: ce problème peut se proposer d'une infinité de manières; il a un nombre infini de solutions. M. Zorawski a donné la solution du cas où l'on prolonge la transformation infinitésimale par rapport aux dérivées de ses fonctions (*Rozprawy* de l'Académie des Sciences de Cracovie, 2e série, t. IV), et M. Levi-Civita (*Atti* de l'Académie de Venise, 7e série, t. V) a prolongé la transformation par rapport aux éléments d'un système covariant ou contrevariant quelconque.

Considérons un espace quadratique à $n+1$ dimensions

$$(116)\qquad ds^2 = \sum_1^{n+1}{}_i \sum{}_j A_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\, dx_i\, dx_j \qquad (A_{ji} = A_{ij}).$$

L'élément linéaire d'une surface

$$(117)\qquad x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des paramètres ou coordonnées arbitraires, peut prendre la forme

$$(118)\qquad ds^2 = \sum_1^{n}{}_i \sum{}_j E_{ij}\, du_i\, du_j \qquad (E_{ji} = E_{ij}).$$

où les quantités E_{ij} sont des fonctions A_{kl} et u_m dont les formes sont faciles à construire.

On effectue sur ces coordonnées u_i un changement de variables quelconque

$$(119)\qquad u'_i = U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où les symboles U_i dénotent des fonctions arbitraires, et l'on obtient

la forme nouvelle de l'élément linéaire

$$(120)\qquad ds^2 = \sum_1^n {}_i \sum {}_j E'_{ij}\, du'_i\, du'_j;$$

ici les E'_{ij} sont fonctions de E_{ij} et u_k

$$(121)\qquad E'_{ij} = E'_{ij}(u_1, u_2, \ldots, u_n, E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{nn});$$

la construction des formes des fonctions E'_{ij} n'offre pas de difficulté.

La famille de transformations (119) et (121) constitue un groupe infini qui laisse invariant l'élément linéaire (118).

Les transformations infinitésimales de ce groupe se déterminent de la manière suivante : On suppose que les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prennent des accroissements arbitraires

$$(122)\qquad \delta u_i = \xi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ξ_i sont des fonctions arbitraires et δt une quantité quelconque infiniment petite. La condition de l'invariance de l'élément linéaire est exprimée par l'équation

$$(123)\qquad \sum_1^n {}_i \sum {}_j [du_i\, du_j\, \delta E_{ij} + E_{ij}(du_i\, d\delta u_j + du_j\, d\delta u_i)] = 0;$$

cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs de $du_1, du_2, \ldots, du_n$; donc

$$(124)\qquad \delta\xi_{ij} = -\sum_1^n {}_k \left(E_{ik}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} + E_{jk}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}\right)\delta t \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

et la transformation infinitésimale la plus générale du groupe est

$$(125)\qquad Df = \sum_1^n {}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_1^n {}_i \sum {}_j \sum {}_k \left(E_{ik}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} + E_{jk}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}\right)\frac{\partial u}{\partial E_{ij}}.$$

En supposant maintenant que l'accroissement

$$(126) \qquad \delta\psi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

d'une fonction arbitraire des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ est connu, il est facile de trouver les variations des dérivées partielles de la fonction ψ. En effet, on a

$$(127) \qquad d\psi - \sum_1^n {}_i \frac{\partial\psi}{\partial u_i} du_i = 0,$$

$$(128) \qquad \delta\, d\psi = d\,\delta\psi = \sum_1^n {}_i \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} du_i\,\delta t.$$

En vertu de (122), la variation de (127) devient

$$(129) \quad \sum_1^n {}_i \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} du_i\,\delta t - \sum_1^n {}_i\, \delta\psi_{u_i} du_i - \sum_1^n {}_i\, \psi_{u_i} \sum_1^n {}_j\, \xi_{i_{u_j}} du_j\,\delta t = 0;$$

cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs de $du_1, du_2, \ldots, du_n$; donc

$$(129\,bis) \qquad \frac{\delta\psi_{u_i}}{\delta t} = \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} - \sum_1^n {}_j\, \psi_{u_j} \xi_{j_{u_i}}.$$

De ces formules il est facile de calculer les accroissements des dérivées partielles de la fonction ψ d'un ordre quelconque au moyen de substitutions successives; cependant, par induction, il est possible d'obtenir une formule générale. Dans le cas d'une fonction de deux variables, on a

$$(130) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\psi_{u_{i_1}^j u_{i_2}^k}}{\delta t} &= \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_{i_1}^j u_{i_2}^k} \\ &\quad - \sum_1^j {}_l \sum_1^k {}_m \binom{j}{l} \binom{k}{m} \Big(\psi_{u_{i_1}^{j-l+1} u_{i_2}^{k-m}} \xi_{i_2 u_{i_1}^l u_{i_2}^m} \\ &\qquad + \psi_{u_{i_1}^{j-l} u_{i_2}^{k-m+1}} \xi_{i_2 u_{i_1}^l u_{i_2}^m} \Big), \end{aligned} \right.$$

où les indices l et m ne peuvent pas être égaux à zéro simultanément; cette formule a la même forme que la formule employée par M. Zorawski dans le Mémoire déjà cité. En remplaçant ψ par $\psi_{u_\varrho^q}$ dans cette formule et en faisant une substitution semblable $n-2$ fois, on obtient la formule cherchée

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta\psi_{u_1^{i_1},u_2^{i_2},\ldots,u_n^{i_n}}}{\delta t} &= \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_1^{i_1},u_2^{i_2},\ldots,u_n^{i_n}} \\ &\quad - \sum_0^n{}_i \sum_0^{i_1}{}_{j_1} \sum_0^{i_2}{}_{j_2} \cdots \sum_0^{i_n}{}_{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \psi_{u_1^{\lambda_1},u_2^{\lambda_2},\ldots,u_n^{\lambda_n}}\, \xi_{i\,u_1^{j_1},u_2^{j_2},\ldots,u_n^{j_n}}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(132)\qquad \lambda_k \equiv i_k - j_k, \qquad j_1 + j_2 + \ldots + j_n > 0.$$

On peut vérifier cette formule dans chaque cas successif au moyen de l'équation

$$(133)\qquad \binom{l+1}{m} - \binom{l}{m} - \binom{l}{m-1} = 0;$$

mais (131) est vraie dans la forme (130), donc elle est toujours vraie.

Maintenant, on suppose la forme suivante de la variation de la fonction arbitraire ψ :

$$(134)\qquad \delta\psi = \sum_1^n{}_i \sum{}_j \rho^{ij}\xi_{i u_j}\,\delta t,$$

où les ρ^{ij} sont des fonctions arbitraires des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

On peut écrire

$$(135)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_h^j,u_i^k} = \sum_0^j{}_l \sum_0^k{}_m \binom{j}{l}\binom{k}{m} \Big(&\overset{11}{\rho}_{u_h^{j-l}u_i^{k-m}}\,\xi_{h u_h^{l+1}u_i^m} \\ &+ \overset{12}{\rho}_{u_h^{j-l}u_i^{k-m}}\,\xi_{h u_h^l u_i^{m+1}} \\ &+ \overset{21}{\rho}_{u_h^{j-l}u_i^{k-m}}\,\xi_{i u_h^{l+1}u_i^m} \\ &+ \overset{22}{\rho}_{u_h^{j-l}u_i^{k-m}}\,\xi_{i u_h^l u_i^{m+1}} \Big), \end{aligned}\right.$$

et, par une induction aisée, on trouve

$$(136)\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{u_1^{i_1},\, u_2^{i_2},\, \ldots,\, u_n^{i_n}} = \sum\nolimits_{ijl} \sum_{1}^{n}{}_{k}\, \rho^{kl}_{u_1^{\lambda_1},\, u_2^{\lambda_2},\, \ldots,\, u_{l-1}^{\lambda_{l-1}},\, u_l^{\lambda_{l+1}},\, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}},\, \ldots,\, u_n^{\lambda_n}}\, \xi_{k u_1^{j_1},\, u_2^{j_2},\, \ldots,\, u_n^{j_n}}$$

où

$$(137)\quad \sum\nolimits_{ijl} = \sum_{1}^{n}{}_{l} \sum_{0}^{i_1}{}_{j_1} \sum_{0}^{i_2}{}_{j_2} \cdots \sum_{0}^{i_{l-1}}{}_{j_{l-1}} \sum_{0}^{i_l+1}{}_{j_l} \sum_{0}^{i_{l+1}}{}_{j_{l+1}} \cdots \sum_{0}^{i_n}{}_{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_{l-1}}{j_{l-1}}\binom{i_l}{j_l-1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n}.$$

Si l'on suppose

$$(138)\qquad \binom{i_1}{k_1} = \binom{i_2}{k_2} = \ldots = \binom{i_n}{k_n} = 0$$

pour toutes les valeurs

$$k_1 \neq 0, 1, \ldots, i_1, \qquad k_2 \neq 0, 1, \ldots, i_2, \qquad k_n \neq 0, 1, 2, \ldots, i_n,$$

la formule précédente s'écrit

$$(139)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\psi_{u_1^{i_1},\, u_2^{i_2},\, \ldots,\, u_n^{i_n}}}{\partial t} \\ &= \sum_{1}^{n}{}_{l} \sum_{0}^{i_1+1}{}_{j_1} \cdots \sum_{0}^{i_n+1}{}_{j_n} \Bigg[\binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_{l-1}}{j_{l-1}}\binom{i_l}{j_l-1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n} \\ &\qquad\qquad \times \sum_{1}^{n}{}_{k}\, \rho^{kl}_{u_1^{\lambda_1},\, u_2^{\lambda_2},\, \ldots,\, u_{l-1}^{\lambda_{l-1}},\, u_l^{\lambda_{l+1}},\, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}},\, \ldots,\, u_n^{\lambda_n}} \\ &\qquad\qquad - \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n}\, \psi_{u_1^{\lambda_1},\, u_2^{\lambda_2},\, \ldots,\, u_{l-1}^{\lambda_{l-1}},\, u_l^{\lambda_l-1},\, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}},\, \ldots,\, u_n^{\lambda_n}} \Bigg]\, \xi_{k u_1^{j_1},\, u_2^{j_2},\, \ldots,\, u_n^{j_n}}, \end{aligned} \right.$$

où

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}\, j_k < 0, \qquad \binom{i_m}{k_m} = 1, \qquad \text{si} \quad i_m = k_m = 0.$$

Les résultats précédents admettent une extension immédiate au cas d'une surface de l'espace dont l'élément linéaire est défini par l'équa-

tion

$$(140)\qquad ds^{\mu} = \sum_{1}^{\nu} {}_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu} \mathrm{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu} dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \ldots dx_n^{i_n} \qquad \left(\sum_{1}^{n}{}^{j} i_j = \nu\right),$$

savoir

$$(141)\qquad ds^{\mu} = \sum_{1}^{\nu-1} {}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}} \mathrm{B}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}} du_1^{j_1} du_2^{j_2} \ldots du_{\nu-1}^{j_{\nu-1}} \qquad \left(\sum_{1}^{\nu-1}{}^{i} j_i = \nu - 1\right),$$

parce que l'équation

$$\delta(ds) = 0$$

donne des formes linéaires en $\xi_{l_{u_m}}$ pour les variations des coefficients $\mathrm{B}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}}$.

Maintenant on suppose : 1°

$$(142)\qquad \psi = \mathrm{E}_{ij};$$

des formules (124) et (139) on tire

$$(143)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{E}_{kl u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} \\ &= -\sum_{0}^{i_1+1}{}_{j_1} \cdots \sum_{0}^{i_n+1}{}_{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_k}{j_k-1}\binom{i_{k+1}}{j_{k+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n} \\ &\quad\times \sum_{1}^{n}{}_{m} \Bigg[\mathrm{E}_{lm u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_k^{\lambda_k-1}, u_{k+1}^{\lambda_{k+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} \\ &\qquad + \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_l}{j_l-1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n} \\ &\qquad \times \mathrm{E}_{km u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_l^{\lambda_l+1}, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} + \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \\ &\qquad \times \left(\mathrm{E}_{kl u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_k^{\lambda_k+1}, u_{k+1}^{\lambda_{k+1}}, \ldots, u_1^{\lambda_n}} + \mathrm{E}_{kl u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_l^{\lambda_l-1}, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}}\right)\Bigg] \\ &\qquad \times \xi_{m u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}} \qquad (j_1 + j_2 + \ldots + j_n > 0). \end{aligned}\right.$$

2° En posant ψ égale à u_1 et considérant u_1 comme une fonction des variables $u_2, u_3, \ldots, u_n$ restantes, les formules (139) révèlent les variations des dérivées partielles de u_1 par rapport aux $u_2, u_3, \ldots, u_n$.

3° Soit ψ une fonction des ρ fonctions

$$(144)\qquad \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

assujetties aux conditions

$$(145)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0;$$

les variations des dérivées de ces fonctions sont données par les formules (131)

$$(146)\quad \frac{\partial \varphi_{j\,u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} = -\sum_1^n {}_i \sum_0^{i_1} {}_{j_1} \sum_0^{i_2} {}_{j_2} \cdots \sum_0^{i_n} {}_{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \varphi_{j\,u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} \xi_{i\,u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}.$$

Ces trois formes de la m^{ieme} prolongation du groupe Df fournissent les moyens de construire les groupes suivants :

$$(147)\quad G^{(m)} f = \sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_0^m {}_{l_1} \sum_0^{m-l_1} {}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_{n-1}} {}_{l_n} \quad \sum_1^n {}_i \sum {}_j \left(\frac{\partial E_{ij\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial E_{ij\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}} \right),$$

$$(148)\quad B^{(m)} f = G^{(m-1)} f + \sum_1^\rho {}_i \sum_0^m {}_{l_1} \sum_0^{m-l_1} {}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_n} {}_{l_n} \frac{\partial \varphi_{i\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}},$$

$$(149)\quad M^{m} f = G^{(m-1)} f + \sum_0^m {}_{l_1} \sum_0^{m-l_1} {}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_{n-2}} {}_{l_{n-1}} \frac{\partial u_{1\,u_2^{l_1}, u_3^{l_2}, \ldots, u_n^{l_{n-1}}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u_{1\,u_2^{l_1}, u_3^{l_2}, \ldots, u_n^{l_{-1}}}}.$$

Ces trois groupes infinis sont des généralisations pour un espace quadratique à $n+1$ dimensions des groupes étudiés par M. Zorawski dans l'espace ordinaire sous les noms respectifs de *Gauss, Beltrami* et *Minding*. Des formules (139) on peut donner une généralisation encore plus grande en construisant les transformations analogues pour un espace quelconque caractérisé par la propriété qu'une puissance de son élément linéaire est une fonction homogène des différentielles des coordonnées ponctuelles.

Les formes (147), (148), (149) fournissent les systèmes complets des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre aux-

quelles doivent satisfaire les invariants différentiels des différents ordres et classes; on les obtient en égalant à zéro les coefficients des fonctions arbitraires ξ_i, $\xi_{i u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}$.

On a d'abord

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial u_n} = 0;$$

donc les invariants différentiels ne contiennent pas les variables u_1, u_2, ..., u_n sous forme explicite; ainsi il faut considérer seulement les équations qui ont écrit des coefficients des fonctions $\xi_{i u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}$.

Il importe de savoir combien d'équations sont indépendantes dans un quelconque de ces systèmes; cette question offre beaucoup de difficulté. Un seul cas montre bien ce fait. On peut écrire les systèmes correspondants aux $m^{\text{ièmes}}$ et $(m+1)^{\text{ièmes}}$ prolongations du groupe de Gauss généralisé de la manière suivante :

$$G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f = \sum_{j_1 - 1}^{m} {}^{i_1} \sum_{j_2 - 1}^{m - i_1} {}^{i_2} \ldots \sum_{j_n - 1}^{m - i_1 - \ldots - i_{n-1}} {}^{i_n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = 0,$$

$$G^{(m+1)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f = G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} + \sum_{j_1 - 1}^{m+1} {}^{i_1} \sum_{j_2 - 1}^{m+1} {}^{i_2} \ldots \sum_{j_{n-1} - 1}^{m+1} {}^{i_{n-1}} A_{i_1 i_2, \ldots, i_{n-1} (i_n = m+1-i_{n-1})} = 0$$

$$\left(\sum_1^n {}^i j_i > 0, \qquad \sum_1^n {}^j i_j = m + 1 \right);$$

en étudiant le système particulier correspondant aux indices

$$j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, \quad m + 1 - j_1 - j_2 - \ldots - j_{n-1},$$

on voit que le maximum de la limite supérieure de la sommation $\sum_{j_n - 1}^{m - j_1 - \ldots - j_{n-1}} {}^{i_n}$ dans $G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f$ est $m + n - 1 - \sum_1^{n-1} {}^i j_i$, et que la limite inférieure est $m + 1 - \sum_1^{n-1} {}^i j_i$; le signe de sommation dans ces limites disparaît avec $G^{(m)} f$ dans le cas $n + 1 = 3$, ainsi la simplicité comparative du problème pour l'espace ordinaire est apparente.

Nous nous contentons ici de l'observation qu'en formant les systèmes des ordres les moins élevés on trouve que la forme bien connue

$$\mathrm{K} = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \left| f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn} \right|$$

est un invariant de Gauss, où

$$s_0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2;$$

que la forme connue

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \sum_1^n {}_i \frac{\partial u_i}{\partial\left(\sqrt{\mathrm{A}}\, \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)}$$

est un invariant de Beltrami; et enfin que la forme

$$\frac{1}{\rho\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}_\varphi}} \sum_1^n {}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\mathrm{M}_i}{\sum_1^n {}_j \mathrm{M}_j \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}},$$

où $\mathrm{M}_\varphi, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ sont les mineurs correspondants respectivement aux 1re, 2e, …, $n^{\text{ième}}$ colonnes de la matrice

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad \mathrm{E}_{21}, \quad \mathrm{E}_{32}, \quad \ldots, \quad \mathrm{E}_{nn} \right|,$$

est un invariant de Minding.

En construisant les systèmes correspondants aux espaces biquadratiques, on obtient les paramètres différentiels introduits par M. Somigliana dans ses travaux sur la transformation des équations aux dérivées partielles (*Annali di Matematica*, t. XVIII).

Enfin, si l'on particularise les groupes (147), (148), (149) pour un espace quadratique quelconque à trois dimensions, on trouve que ces groupes particuliers sont de la même forme que les groupes de Gauss, Beltrami et Minding de l'espace ordinaire; donc tous les invariants et tous les théorèmes de déformation de l'espace ordinaire

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \mathrm{E}\, du_1^2 + 2\mathrm{F}\, du_1\, du_2 + \mathrm{G}\, du_2^2$$

peuvent être traduits immédiatement en invariants et théorèmes correspondants pour le cas d'un espace quadratique quelconque à trois dimensions

$$ds^2 = \sum_1^3 {}_i \sum {}_j A_{ij}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i dx_j + \Phi\, du_1^2 + 2\Phi\, du_1 du_2 + X\, du_2^2.$$

D'ailleurs, l'extension aux formes différentielles quadratiques à n variables est immédiate, mais, en face du théorème de Beez, il n'est pas permis de parler de déformation dans tous les cas.

Sur les deux systèmes de triades de treize éléments;

PAR M. G. BRUNEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

On appelle *système de triades* de $6n+1$ ou de $6n+3$ éléments un ensemble de triades tel que chacune des duades que l'on peut former avec les éléments considérés apparaisse dans l'ensemble une fois et une fois seulement.

De tels systèmes existent pour toute valeur de n. Cette proposition a été établie par Kirkman (1), puis sous une forme identique au fond, mais plus explicite, par Reiss (2).

Les résultats obtenus par M. Netto dans les *Mathematische Annalen* (3) ne sont pas d'un caractère aussi général, mais fournissent dans certains cas des systèmes distincts de ceux que l'on obtient par l'emploi du procédé de Kirkman-Reiss. M. H. Moore a établi ensuite (4) l'existence des systèmes de triades pour toute valeur de n et a montré en particulier que lorsque le nombre des éléments est supérieur à 13 il y a au moins deux systèmes de triades essentiellement distincts.

Dans le cas de 13 éléments MM. Netto et H. Moore étaient portés

(1) *Camb. and Dubl. M. J.*, t. II; 1847.
(2) *J. de Crelle*, t. 56; 1859.
(3) T. XLII; 1893.
(4) *Math. Ann.*, t. XLIII; 1893.

à croire qu'il n'existait effectivement qu'un seul système de triades.

M. Jan de Vries [1] a signalé l'existence d'un système de triades de 13 éléments, distinct de celui que M. Netto avait construit. Il ajoute qu'il n'est pas en état de prouver que les deux systèmes ainsi obtenus sont les seuls possibles.

Nous nous proposons d'établir ici que le système donné par M. Jan de Vries est identique au fond au système fourni par la construction de Kirkman-Reiss.

Nous montrerons aussi qu'il n'y a en réalité pour 13 éléments que deux systèmes distincts.

Représentons par S_1 le système de triades contenu dans le Tableau

S_1

1	4	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	1
2	5	1	2	3	8	10	12	6	6	4	4	5	5
3	6	4	5	6	9	11	7	9	8	11	10	7	12

4	5	6	4	5	6	1	1	2	2	3	3
7	9	11	9	8	7	7	8	9	10	11	12
8	10	12	12	11	10	11	10	7	12	9	8

;

les triades qui figurent dans un des rectangles du Tableau s'échangent entre elles par les substitutions suivantes :

$$(0)\ (1, 2, 3)\ (4, 5, 6)\ (7, 9, 11)\ (8, 10, 12)$$

et

$$(0)\ (1)\ (2, 3)\ (4)\ (5, 6)\ (7, 8)\ (9, 10)\ (11, 12).$$

Il n'y a donc en réalité que huit types distincts de triades dans le Tableau S_1, par exemple les triades

1	4	0	0	1	4	4	1
2	5	1	8	6	7	9	7
3	6	4	9	9	8	12	11

[1] *Circ. Mat. di Palermo*, et *Verslagen Zitt. K. Ak. Wetens.*, t. III, p. 64-67; 1894.

Si l'on considère dans le Tableau S_1 les quatre triades

1	1	9	9
2	7	2	3
3	11	7	11

on reconnaît immédiatement que l'on peut écrire quatre triades différentes des précédentes et présentant les mêmes duades en substituant aux quatre triades les suivantes :

1	1	9	9
2	3	2	7
7	11	3	11

Par un tel échange le Tableau S_1 se trouve modifié et nous déduisons de la sorte du premier Tableau S_1 un nouveau Tableau S_2 que l'on peut disposer somme il suit :

S_2

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6
5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4	9	8

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4
1	7	10	3	2	6	4	9	8	5	12	0	11

Les triades qui figurent dans un des deux rectangles du Tableau s'échangent entre elles par la substitution cyclique

$$(6, 4, 9, 8, 5, 12, 0, 11, 1, 7, 10, 3, 2).$$

Il n'y a donc en réalité ici que deux types distincts de triades, par exemple les triades

6	6
4	9
5	1

Les différents systèmes de triades de 13 éléments qui ont été donnés jusqu'ici peuvent être ramenés par une substitution convenable effectuée sur les éléments à coïncider avec le Tableau S_1 ou avec le Tableau S_2.

Prenons le système de Kirkman (¹) mis sous la forme

$$
K \left\{ \begin{array}{cccccccccccccc}
A & A & A & A & A & A & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_4 \\
a_1 & a_3 & b_1 & b_3 & c_1 & c_3 & b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & b_4 & b_1 & b_2 & b_3 \\
a_2 & a_4 & b_2 & b_4 & c_2 & c_4 & c_1 & c_4 & c_3 & c_1 & c_3 & c_2 & c_4 & c_2 \\
 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\
 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & b_3 & b_4 & b_4 & b_3 & c_4 & c_3 & c_3 & c_4 & \\
 & b_2 & b_1 & b_4 & b_3 & c_3 & c_2 & c_4 & c_1 & a_3 & a_1 & a_4 & a_2 &
\end{array} \right.
$$

Si l'on remplace respectivement les symboles

$$A \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

par les chiffres

$$6 \quad 9 \quad 1 \quad 8 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 10 \quad 7 \quad 11 \quad 12 \quad 4 \quad 5$$

on retrouve précisément le Tableau S_1. Nous pouvons exprimer ce fait par la relation suivante

$$\begin{pmatrix} A & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 2 & 3 & 0 & 10 & 7 & 11 & 12 & 4 & 5 \end{pmatrix} K = S_1.$$

Il n'est pas utile d'insister et d'indiquer les transformations qui permettent de passer des deux autres systèmes de triades que Kirkman a donnés dans le même Mémoire ou bien de celui que Reiss a construit (²) au seul système S_1.

Nous nous contenterons de donner les transformations relatives au

(¹) *Camb. and Dubl. M. J.*, t. VIII, p. 38-45; 1853.
(²) *J. de Crelle*, t. 56; 1859.

système de Jan de Vries (¹). Le système est le suivant :

$$
(\mathrm{V})\quad \left\{
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 4 & 5 \\
3 & 5 & 7 & 11 & 12 & 13 & 6 & 11 & 13 & 9 & 12 & 8 & 12 \\
3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 11 \\
6 & 7 & 9 & 7 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 & 12 \\
13 & 11 & 10 & 12 & 13 & 11 & 10 & 9 & 13 & 12 & 11 & 10 & 13
\end{array}
\right.
$$

et si l'on y permute

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13
\end{array}
$$

en

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & 9 & 12 & 10 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 & 0 & 11 & 7 & 1
\end{array}
$$

on retrouve encore le Tableau S_1. Nous pouvons donc écrire la relation

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
4 & 9 & 12 & 10 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 & 0 & 11 & 7 & 1
\end{pmatrix} \mathrm{V} = S_1.
$$

Le système de M. Jan de Vries n'est donc pas distinct de celui de Kirkman et rien n'est plus facile, avec ce qui précède, que de donner la substitution qui transforme l'une des formes dans l'autre. Il suffit de faire le produit de la substitution qui conduit de V à S_1 par l'inverse de la substitution qui conduit de K à S_1. On a

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
c_3 & a_1 & c_2 & b_3 & a_4 & c_4 & \mathrm{A} & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & b_4 & a_2
\end{pmatrix} \mathrm{V} = \mathrm{K}.
$$

(¹) *Zitt. Ak. Wetens.*, t. III; 1894.

En ce qui concerne le système de Netto ([1])

$$(\mathrm{N})\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right.$$

il ne diffère évidemment que par la forme du système S_2, et l'on a, entre ces deux systèmes, la relation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 4 & 9 & 8 & 5 & 12 & 0 & 11 & 1 & 7 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{N} \equiv S_2.$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que S_1 et S_2 sont deux systèmes essentiellement distincts et que les autres systèmes que l'on peut construire se réduisent nécessairement à l'une de ces deux formes par une substitution convenablement choisie.

Considérons un système quelconque des triades des 13 éléments 0, 1, 2, ..., 12. Les triades sont au nombre de 26. Prenons l'une quelconque d'entre elles a, b, c et supprimons dans le Tableau cette triade et toutes celles qui contiennent un de ses éléments, a ou b ou c. Comme a figurait dans le système accouplé à tous les autres éléments, il existe, en dehors de la triade a, b, c, cinq autres triades contenant a. Il en est de même pour b et c. Le nombre total des triades supprimées est égal à $1 + 3.5 = 16$. Les triades qui restent sont en nombre égal à 10 et contiennent les éléments autres que a, b, c, c'est-à-dire un nombre d'éléments aussi égal à 10; enfin, un quelconque des éléments qui subsistent apparaît dans trois triades, puisque, dans le système initial, cet élément figurait dans six triades et que l'on a supprimé les trois triades distinctes où cet élément s'accouplait à a, à b et à c.

([1]) *Math. Ann.*, t. XLII; 1893.

Les triades qui subsistent, relativement à la triade quelconque a, b, c du système, correspondent donc à une configuration $(3,3)_{10}$ de Kantor.

D'autre part, les duades que l'on peut former avec 10 éléments sont en nombre égal à $\frac{10.9}{2} = 45$. Sur ces 45 duades, il y en a 30 qui sont employées dans les dix triades qui subsistent, ou, en d'autres termes, dans la configuration $(33)_{10}$ dont nous connaissons maintenant l'existence. Les quinze autres se divisent par groupes de cinq; il y a un groupe de cinq duades contenant les dix éléments, et chacun d'eux une seule fois, formé par les duades qui figurent avec a dans les triades supprimées; de même, il y a un groupe de cinq duades correspondant à b et un groupe de cinq correspondant à c.

Si l'on représente les dix éléments par dix points dans l'espace et une duade de deux éléments par une ligne qui relie les deux sommets correspondants, les quinze duades dont il s'est agi en dernier lieu correspondent à un réseau à dix sommets, chacun des sommets étant le point de départ de trois lignes ou arêtes. Cinq des arêtes sont relatives à un élément extérieur a et constituent ce que nous avons appelé ailleurs [1] un *demi-trajet*. Un autre demi-trajet correspond à b; un troisième demi-trajet est relatif à c.

De ce qui précède il résulte que, pour construire un système de triades de 13 éléments, il suffit : 1° de construire un ensemble de dix triades pour dix éléments dans lequel chaque élément apparaît trois fois, et trois fois seulement; 2° de former le réseau des duades non employées dans les dix triades précédentes et de le décomposer en demi-trajets; 3° d'écrire un Tableau contenant les dix triades fournies par la première construction, une triade formée avec trois éléments distincts de ceux déjà employés et quinze triades obtenues en mettant devant chacune des duades qui entrent dans un demi-trajet un de ces trois nouveaux éléments.

La solution de la première partie de la question est connue. Kantor, Martinetti ont montré qu'il n'existait que dix configurations $(3,3)_{10}$

---

[1] G. Brunel, *Analysis Situs : Recherches sur les réseaux* (*Mém. Soc. Ph. Nat. Bord.*, V_4, p. 165; 1895).

distinctes auxquelles on est convenu d'attribuer respectivement les symboles suivants :

A B C D E F G H J K

Nous aurons donc à examiner successivement ce qui arrive lorsque l'on prend, comme point de départ de la construction d'un système de triades, ces différentes configurations. Relativement aux Tableaux S_1 et S_2, les configurations $(33)_{10}$ qui se présentent comme correspondant aux différentes triades qui constituent chacun des Tableaux offrent les caractères suivants :

Système S_1.

La triade	1, 2, 3	et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau S_1, sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs :	G
	4, 5, 6		F
	0, 1, 4		A
	0, 8, 9		D
	1, 6, 9		J
	4, 7, 8		H
	4, 9, 12		K
	1, 7, 11		H

Il y a donc, pour le système S_1, des triades qui correspondent à des configurations $(33)_{10}$ de symboles

G F A D J H K

en nombres respectivement égaux à

1 1 3 3 6 9 3

Système S_2.

La triade	4, 5, 6	et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau S_2, sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs :	J
	1, 6, 9		E

Il y a donc, pour le système S_2, des triades qui correspondent à des

configurations $(3,3)_{10}$ de symboles

J E

en nombres respectivement égaux à

13 13

Ceci nous montre une différence essentielle dans la constitution des systèmes S_1 et S_2 qui sont ainsi complètement distincts.

Les configurations de symbole B et C n'apparaissent pas dans la constitution des systèmes S_1 et S_2; on serait porté à croire que ces deux configurations fournissent alors des systèmes nouveaux de triades. Nous verrons qu'il n'en est rien et que la seconde partie de la question n'admet pas alors de solution.

Cette seconde partie de la question consiste à former, pour un réseau déterminé, les demi-trajets. Les réseaux que l'on a à considérer ici se présentent avec un caractère des plus simples, mais nous savons, d'une manière générale, former d'une façon systématique les demi-trajets relatifs à un réseau quelconque donné [1].

Soient i, k deux sommets quelconques du réseau; considérons un carré à n lignes et à n colonnes et faisons correspondre la $p^{\text{ième}}$ ligne et la $p^{\text{ième}}$ colonne du carré au sommet p. Dans la $i^{\text{ème}}$ colonne et dans la $k^{\text{ième}}$ ligne, nous conviendrons de mettre o lorsque les deux sommets du réseau i et k ne sont pas reliés par une arête, et de mettre un symbole $\frac{i}{k}$ indiquant la présence de l'arête qui relie i à k lorsque cette arête existe.

Le symbole $\frac{k}{i}$ sera considéré comme identique au symbole $\frac{i}{k}$, mais de signe contraire; cela revient à supposer que, sur chacune des arêtes du réseau, on choisit un sens déterminé.

Nous ne considérons pas les arêtes du réseau qui partent d'un sommet pour aboutir à ce même sommet. Nous n'avons pas non plus à supposer ici l'existence de plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets.

---

(1) *Mém. Soc. Ph. Nat. Bord.*, V_4, p. 176; 1895.

Dans ces conditions, à un réseau donné correspond un tableau carré parfaitement défini que l'on peut considérer comme un déterminant symétrique gauche.

Inversement, un déterminant symétrique gauche étant donné, il lui correspond un réseau parfaitement défini.

Les réseaux qui nous occupent contiennent un nombre pair de sommets. Or on sait qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est le carré d'une expression qu'il est facile de former. Chacun des termes qui figurent dans cette expression correspond à un demi-trajet.

Le développement de cette expression se simplifie considérablement dans un cas tel que celui que nous rencontrons ici. Le réseau est alors un réseau à sommets trilatères, et nous nous proposons de former de toutes les façons possibles trois demi-trajets qui épuisent toutes les arêtes. Considérons un de ces demi-trajets et imaginons que, dans le réseau, on supprime les arêtes qui figurent dans le demi-trajet; il reste un réseau à sommets bilatères qui peut être connexe ou non. Si le réseau constitue un seul polygone, ses côtés pairs fournissent un demi-trajet, ses côtés impairs donnent le troisième demi-trajet. Si le réseau est formé de plusieurs polygones, il suffit que l'un de ces polygones ait un nombre impair de côtés pour que l'on ne puisse pas former de demi-trajet avec les arêtes qui restent; lorsque tous les polygones ont un nombre pair de côtés, on peut, de plusieurs façons, former les demi-trajets complémentaires, de 2^{l-1} façons s'il y a l polygones.

Nous allons considérer successivement les différentes configurations $(33)_{10}$ de Kantor et étudier les réseaux auxquels conduit chacune d'elles.

Configuration A.

On peut écrire une configuration A, où les éléments sont

2 3 5 6 7 8 9 10 11 12,

sous la forme

(A)

2	3	5	6	5	6	2	2	3	3
6	5	9	11	8	7	9	10	11	12
8	7	10	12	11	10	7	12	9	8

qui résulte de la suppression des éléments 0, 1, 4 dans S_1. Les duades

qui ne figurent pas dans A peuvent être représentées par le Tableau suivant

$$\begin{array}{cccccccc}
2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
3 & 6 & 6 & 9 & 8 & 9 & 12 & 11 \\
5 & 10 & 12 & & 11 & 10 & & \\
11 & & & & 12 & & &
\end{array}$$

correspondant à un réseau à dix sommets trilatères, les arêtes du réseau étant des lignes qui joignent un quelconque des points de la première ligne aux points de la même colonne :

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 2 & 2 & 3 & & 10 \\
3 & 5 & 11 & 6 & \cdots & 11
\end{array}.$$

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\frac{2}{3}$ par exemple, et écrivons au-dessous de chaque demi-trajet les demi-trajets qui complètent avec la première les 15 duades. Lorsqu'un même demi-trajet peut être complété de différentes façons nous le répéterons avec les différents demi-trajets qui le complètent; lorsqu'un demi-trajet ne peut être complété, nous indiquerons entre crochets un polygone d'un nombre impair de côtés formé avec les duades non employées et dont l'existence entraîne l'impossibilité des demi-trajets complémentaires.

On obtient de la sorte les Tableaux suivants

$$(a_3)\quad\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ccccc}
2 & 5 & 7 & 9 & 10 \\
3 & 6 & 8 & 12 & 11 \\
{[2} & 5 & 12 & 7 & 11]
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{ccccc}
2 & 5 & 7 & 8 & 9 \\
3 & 6 & 11 & 10 & 12 \\
2 & 12 & 8 & 6 & 10 \\
5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\
5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\
12 & 8 & 6 & 10 & 2
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

(a_5)	2	5	7	8	10
	3	6	12	9	11
	2	12	6	10	7
	5	9	3	8	11
	5	9	3	8	11
	12	6	10	7	2
(a_2)	2	5	6	7	10
	3	12	9	8	11
	2	6	10	9	7
	5	3	8	12	11
	5	3	8	12	11
	6	10	9	7	2
(a_3)	2	5	6	7	8
	3	12	9	11	10
	2	6	10	7	9
	5	3	11	8	12
	5	3	11	8	12
	6	10	2	9	7
(a_1)	2	5	6	7	8
	3	12	9	11	10
	2	6	10	7	9
	5	3	11	12	8
	5	3	11	12	8
	6	10	2	9	7

Remarquons tout d'abord que si l'on forme avec les éléments 0, 1, 4

la suite des triades déduites des demi-trajets a_1 :

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
0	2	5	6	7	8	2	6	10	7	9	5	3	11	12	8
4	3	12	9	11	10	5	3	11	12	8	6	10	2	9	7

on retrouve toutes les triades qui, avec celles contenues déjà dans A, constituent S_1.

Nous pouvons écrire symboliquement cette proposition de cette façon

$$A + (1, 0, 4)a_1 = S_1.$$

Ceci posé remarquons que la substitution cyclique

$$\sigma_a = (7, 3, 12, 10, 5, 8, 2, 9, 11, 6)$$

laisse A inaltérable, mais permute entre eux les Tableaux a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; on a en effet

$$\sigma_a a_1 = a_2, \qquad \sigma_a a_2 = a_3, \qquad \sigma_a a_3 = a_4, \qquad \sigma_a a_4 = a_5, \qquad \sigma_a a_5 = a_1,$$

les rangées des Tableaux se correspondant dans un certain ordre. Nous conclurons de là que, en désignant dans chaque cas par a, b, c les éléments 0, 1, 4 pris dans un ordre convenablement choisi, on aura les relations

$$\sigma_a[A + (a, b, c)a_5] = S_1,$$
$$\sigma_a^2[A + (a, b, c)a_4] = S_1,$$
$$\sigma_a^3[A + (a, b, c)a_3] = S_1,$$
$$\sigma_a^4[A + (a, b, c)a_2] = S_1,$$

c'est-à-dire que la configuration A fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration B.

On peut écrire une configuration B, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

sous la forme

$$(B)\qquad \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 9 & 8 & 8 & 9 \end{cases}$$

Les duades qui ne figurent pas dans B peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	4	5	6
7	4	3	6	5	7	7
8	6	5	9	9		
9	8	8				

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\7\end{smallmatrix}$ par exemple, et essayons de les compléter; nous arrivons aux résultats suivants :

$$\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 5 \\ [0 & 8 & 1 & 4 & 9] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 2 & 3 & 9 \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il n'existe pas de groupes de trois demi-trajets épuisant toutes les duades. La configuration B ne fournit aucun système de triades.

Le réseau que nous avons ainsi rencontré est intéressant à un autre point de vue; il nous offre un exemple d'un réseau à sommets trilatères tel qu'il n'existe aucun contour fermé ou aucun ensemble de contours fermés comprenant chacun un nombre pair d'arêtes qui passe par tous les sommets.

Configuration C.

On peut écrire une configuration C, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

sous la forme

$$(C)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 7 & 7 & 7 & 4 & 4 & 8 & 8 & 9 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans C sont précisément les mêmes que celles que nous avions déduites de l'examen de la configuration B, et avec lesquelles on ne peut former de groupes de demi-trajets.

La configuration C ne fournit aucun système de triades.

Configuration D.

On peut écrire une configuration D, où les éléments sont

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 10\quad 11\quad 12,$$

sous la forme

$$(D)\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & 10 & 5 & 7 & 10 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 7 & 12 & 11 & 12 & 11 & 10 & 7 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans D peuvent être représentées par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 10 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & 10 & 12 & 11 \\ 6 & 6 & 11 & 12 & 11 & & \\ 10 & 7 & 12 & & & & \end{array}$$

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\frac{1}{4}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets qu'ils admettent :

$$(d_1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 & 11 \\ \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right.$$

$$(d_2)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 12 \\ \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 11 \\ 6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\ \\ 6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 11 & 1 \end{array}\right.$$

Remarquons que la substitution

$$\sigma_d = (1)(2)(3)(6)(11, 12)(5, 7)(4, 10)$$

laisse D inaltéré, mais permute entre eux les Tableaux (d_1) et (d_2). Or la forme que nous avons choisie pour D résulte de la suppression des éléments 0, 8, 9 dans S_1. On voit alors immédiatement que l'on a

$$D + (0, 9, 8)\, d_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_d [D + (a, b, c)\, d_2] \equiv S_1.$$

a, b, c étant les éléments 0, 8, 9 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration D fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration E.

On peut écrire une configuration E, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 6 & 8 & 5 & 12 & 0 & 7 & 4 & 12 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 12 & 0 & 11 & 10 & 8 & 11 & 1 & 10 \\ 5 & 11 & 1 & 7 & 10 & 6 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans E peuvent être représentées

par le Tableau suivant :

0	1	4	5	6	7	8	10
5	6	10	7	8	11	12	12
6	7	11	10				
8	11	12					

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\frac{0}{5}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent :

$$
(e)\quad \left\{
\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 8 & 4 & 7 \\
5 & 6 & 12 & 10 & 11 \\
 & [0 & 6 & 8] & \\
0 & 1 & 4 & 6 & 10 \\
5 & 7 & 11 & 8 & 12 \\
0 & 1 & 7 & 10 & 12 \\
6 & 11 & 5 & 4 & 8 \\
6 & 11 & 5 & 4 & 8 \\
1 & 7 & 10 & 12 & 0
\end{array}
\right.
$$

La forme que nous avons choisie pour E résulte de la suppression des éléments 2, 3, 9 dans S_2. On voit alors immédiatement que l'on a

$$E + (2, 3, 9)\, e \equiv S_2,$$

c'est-à-dire que la configuration E fournit un seul système de triades qui n'est autre que S_2.

Configuration F.

On peut écrire une configuration F, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{F})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 11 & 2 & 11 & 7 & 9 & 8 & 10 & 12 \\ 12 & 8 & 10 & 3 & 7 & 9 & 11 & 10 & 12 & 8 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans F peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	7	8	9	11
1	9	8	7	8	11	10	12
2	12	11	10	10		12	
3							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent.

$$(f)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 9 & 11 \\ 1 & 8 & 7 & 10 & 12 \\ & [1 & 9 & 12] & \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 1 & 11 & 10 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 12 & 9 & 7 \\ 2 & 11 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 11 & 1 & 10 & 3 \\ 8 & 12 & 9 & 7 & 0 \end{array}\right.$$

La forme que nous avons choisie pour F résulte de la suppression des éléments 4, 5, 6 dans S_1. On voit alors immédiatement que l'on a

$$\mathrm{F} + (4, 5, 6) f \equiv S_1,$$

c'est-à-dire que la configuration F fournit un seul système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration G.

On peut écrire une configuration G, où les éléments sont

$$0 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(G) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 10 & 5 & 7 & 12 & 8 & 9 & 11 & 10 \\ 12 & 9 & 11 & 6 & 8 & 9 & 11 & 10 & 12 & 7 \end{array} \right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans G peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	4	5	6	7	8	9	10
4	10	7	8	9	10	11	12
5	11	12	9	11	12		
6							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent.

$$(g_2) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 5 & 6 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 8 & 11 & 12 \\ \\ 0 & 12 & 10 & 11 & 9 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 12 & 10 & 11 & 9 & 0 \end{array} \right.$$

$$(g_1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 12 & 9 & 11 & 10 \\ \\ 0 & 7 & 11 & 10 & 8 \\ 5 & 9 & 4 & 12 & 6 \\ \\ 5 & 9 & 4 & 12 & 6 \\ 7 & 11 & 10 & 8 & 0 \end{array} \right.$$

La forme que nous avons choisie pour G résulte de la suppression des éléments 1, 2, 3 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_g = (0)(4)(5)(6)(7, 12)(8, 9)(10, 11)$$

laisse inaltérée G, mais permute entre eux les Tableaux g_1 et g_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$G + (1, 2, 3)g_1 \equiv S_1,$$

et, d'autre part,

$$\sigma_g[G + (a, b, c)g_2] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 2, 3 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration G fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration H.

On peut écrire une configuration H, où les éléments sont

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{H}) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 3 & 5 & 5 & 5 & 4 & 6 & 4 & 6 & 9 & 2 \\ 8 & 4 & 9 & 0 & 3 & 3 & 12 & 8 & 0 & 10 \\ 12 & 6 & 10 & 2 & 10 & 0 & 9 & 2 & 8 & 12 \end{array} \right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans H peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	6	8
4	3	5	8	8	9	10
10	4	9		12	10	
12	9				12	

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{4}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils

admettent :

	0	2	5	6	8
	4	3	12	9	10
	0	6	2	8	3
(h_1)	10	12	4	5	9
	10	12	4	5	9
	6	0	8	3	2

	0	2	5	6	8
	4	3	12	9	10
	0	6	2	3	8
(h')	10	12	9	5	4
	10	12	9	5	4
	6	0	3	8	2

	0	2	3	6	8
	4	9	5	12	10
	0	6	3	4	5
(h_2)	10	9	2	8	12
	10	9	2	8	12
	5	3	4	5	0

La forme que nous avons choisie pour H résulte de la suppression des éléments 1, 7, 11 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_h = (3)(5)(8, 12)(2, 9)(0, 10)(4, 6)$$

laisse inaltérée H, mais permute entre eux les Tableaux h_1 et h_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$H + (1, 11, 7)h_1 = S_1,$$

et, d'autre part,

$$\sigma_h[\mathrm{H} + (a, b, c)h_2] \equiv \mathrm{S}_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 7, 11 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à h', remarquons que, si l'on échange respectivenfent

$$3 \quad 5 \quad 8 \quad 12 \quad 2 \quad 9 \quad 0 \quad 10 \quad 4 \quad 6$$

en

$$0 \quad 1 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 9 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 2.$$

H devient

$$(\mathrm{H}'_1) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 9 & 12 \\ 10 & 3 & 9 & 5 & 0 & 0 & 11 & 10 & 5 & 6 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 6 & 5 & 9 & 12 & 10 & 11, \end{array} \right.$$

qui est la forme H résultant de la suppression des éléments 4, 7. 8 dans S_1.

h' devient par cette substitution

$$(h'_1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 3 & 12 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 11 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 12 & 0 & 10 \\ 6 & 11 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 11 & 0 & 10 & 12 \end{array} \right.$$

et l'on voit immédiatement que l'on a

$$\mathrm{H}_1 + (7, 4, 8)h'_1 \equiv \mathrm{S}_1.$$

La configuration H fournit donc un seul système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration J.

On peut écrire une configuration J, où les éléments sont

$$0\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 7\quad 8\quad 10\quad 11\quad 12,$$

sous la forme

(J)

2	2	2	0	5	4	12	5	4	12
0	11	10	11	8	3	7	3	7	8
5	4	12	10	11	10	0	7	8	3

Les duades qui ne figurent pas dans J peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	7	8	11
3	3	11	5	10	10	10	12
4	7		12	12	11		
8	8						

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent :

(j_1)

0	2	4	8	11
3	7	5	10	12
0	12	10	11	2
4	5	7	3	8
4	5	7	3	8
12	10	11	2	0

(j_2)

0	2	4	7	11
3	8	5	10	12
0	12	10	2	11
4	5	8	3	7
4	5	8	3	7
12	10	0	11	2

$$(j')\quad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 12 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 12 & 10 & 0 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

$$(j_3)\quad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 12 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 11 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right.$$

La forme que nous avons choisie pour J résulte de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_j = (2)(7, 3, 8)(4, 5, 12)(0, 10, 11)$$

laisse inaltérée J, mais change j_1 en j_2, et j_2 en j_3. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$J + (6, 1, 9)j_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_j[J + (a, b, c)j] \equiv S_1,$$

$$\sigma_j^2[J + (a, b, c)j] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 6, 9 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à j', remarquons que la forme que nous avons choisie pour J résulte aussi de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans S_2. On en conclut la relation

$$J + (6, 1, 9)j' \equiv S_2.$$

La configuration J fournit donc deux systèmes de triades, mais ces systèmes de triades ne sont autres que S_1 et S_2.

Configuration K.

On peut écrire une configuration K, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11,$$

sous la forme

(K)

1	0	1	0	11	2	10	3	0	1
7	5	8	6	5	8	6	7	10	2
11	2	10	3	8	6	7	5	11	3

Les duades qui ne figurent pas dans K peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	5	6	7
1	5	7	8	6	11	8
7	6	10	10	10		
8		11	11			

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polynomes d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires, quand ils existent :

0	2	3	5	6
1	7	8	10	11
	[1	5	6]	

(k_2)

0	2	7	3	5
1	10	8	11	6
0	2	6	5	3
7	11	1	10	8
7	11	1	10	8
2	6	5	3	0

$$(k_1)\quad \begin{cases} 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 11 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \end{cases}$$

La forme que nous avons choisie pour K résulte de la suppression des éléments 4, 9, 12 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_k = (0, 1)(2, 10, 3, 11)(5, 8, 6, 7)$$

laisse inaltérée K, mais change k_1 en k_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$K + (4, 12, 9)k_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_k[K + (a, b, c)k_2] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 4, 9, 12 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration K fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

En résumé, il n'y a que deux systèmes distincts de triades de 13 éléments. Dans la constitution de l'un d'eux nous reconnaissons la présence des configurations $(33)_{10}$ des symboles A, D, F, G, H, J et K ; dans la constitution du second n'existent que les configurations E et J.

Les configurations B et C ne donnent naissance à aucun système de triades, mais fournissent un réseau à sommets trilatères, curieux au point de vue des trajets que l'on peut former avec ses arêtes.

Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation;

Par M. P. DUHEM.

Lagrange a montré qu'un système soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, et qui se trouve en équilibre absolu, est en équilibre stable lorsque le potentiel est minimum. Sa démonstration, fondée sur la considération des petits mouvements, ne prouve, en réalité, ni que cette condition soit nécessaire pour la stabilité de l'équilibre, ni qu'elle soit suffisante. Le caractère suffisant de cette condition a été établi d'une manière entièrement rigoureuse et très simple par Lejeune-Dirichlet; sa démonstration est aujourd'hui classique.

Les conditions de stabilité de l'équilibre relatif en une masse qui tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe ont été établies jusqu'ici par la seule considération des petits mouvements; cette méthode prête aux mêmes objections que la méthode suivie par Lagrange dans le cas de l'équilibre absolu.

Nous nous proposons de trouver ici, par un artifice semblable à celui de Lejeune-Dirichlet, un caractère qui suffit, au moins sous certaines conditions, à assurer cette stabilité.

1. Équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Supposons qu'un système quelconque soit animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω_0, autour d'un axe que

nous prendrons pour axe des z. On sait que les conditions de l'équilibre relatif de cette masse s'obtiendront en écrivant que les équations de la statique sont vérifiées lorsqu'on adjoint aux forces extérieures appliquées à la masse fluide la force centrifuge appliquée à chaque masse élémentaire dm ; les composantes de cette force sont

$$(1) \qquad X_c dm = \omega_0^2 x\, dm, \qquad Y_c dm = \omega_0^2 y\, dm, \qquad Z_c = 0.$$

Désignons par $\mathfrak{F}$ le potentiel interne du système; par $\delta\mathfrak{F}$ la variation que subit ce potentiel dans une modification virtuelle sans variation de température; par $d\tau_e$ le travail effectué, dans la même modification, par les actions extérieures, *actions dont le moment par rapport à* Oz *est supposé constamment nul;* par $d\tau_c$ le travail des forces centrifuges, qui se réduit à

$$(2) \qquad d\tau_c = \omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\, dm.$$

Les conditions de l'équilibre relatif s'obtiendront en écrivant que l'on a, pour toute modification isothermique virtuelle à partir de l'état considéré,

$$(3) \qquad d\tau_e + d\tau_c - \delta\mathfrak{F} = 0.$$

Supposons le système animé d'un mouvement quelconque. La vitesse d'un point P de la masse élémentaire dm, à un instant donné, se compose d'une vitesse perpendiculaire au plan qui passe par le point P et l'axe des z et d'une vitesse située dans ce plan et, partant, rencontrant l'axe des z; désignons la première par $\omega(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et la seconde par ρ. La force vive du système sera alors

$$(4) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int [\omega^2(x^2+y^2) + \rho^2]\, dm$$

et le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z sera

$$(5) \qquad M = \int \omega(x^2+y^2)\, dm.$$

Dans une modification quelconque du mouvement du système, M éprouve une variation

$$(6)\qquad \delta M = 2\int \omega(x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int (x^2+y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Supposons que la modification soit produite à partir d'un état où le fluide est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z; alors, pour tous les éléments dm, ω a la même valeur ω_0; supposons, en outre, qu'en cette modification, M doive garder une valeur invariable; nous aurons l'égalité

$$(7)\qquad 2\omega_0 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int (x^2+y^2)\,\delta\omega\,dm = 0.$$

Considérons maintenant la quantité

$$(8)\qquad W = \frac{1}{2}\int \omega^2(x^2+y^2)\,dm.$$

Dans une modification quelconque du mouvement, cette quantité éprouve une variation

$$(9)\qquad \delta W = \int \omega^2(x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \int \omega\,(x^2+y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Si l'état initial du système est un état de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω_0, autour de l'axe des z, cette égalité devient

$$(10)\qquad \delta W = \omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm + \omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta\omega\,dm.$$

Si, en outre, le moment M de la quantité de mouvement est supposé invariable, on a l'égalité (7), et l'égalité précédente devient

$$(11)\qquad \delta W = -\,\omega_0^2 \int (x\,\delta x + y\,\delta y)\,dm$$

ou, selon (2),

$$(12)\qquad \delta W = -\,d\mathfrak{T}_e.$$

Dès lors, on voit que la condition (3) peut être remplacée par la suivante : *Pour qu'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire* ω_0, *autour de l'axe des* z, *soit en équilibre relatif dans un certain état, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité*

$$d\tau_e - \delta(\mathcal{F} + W) = 0 \tag{13}$$

en toute modification virtuelle, imposée au système à partir de cet état, qui laisse invariable la température de chaque élément dm *et qui peut, pour chacun de ces éléments, faire varier* ω, *tout en laissant invariable la quantité* M.

2. Critérium de stabilité de l'équilibre relatif.

Supposons maintenant que les forces extérieures appliquées au système admettent un potentiel Ω :

$$d\tau_e = -\delta\Omega, \tag{14}$$

cas auquel l'égalité (13) pourra s'écrire

$$\delta\Phi = \delta(\mathcal{F} + \Omega + W) = 0, \tag{15}$$

en posant

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega + W. \tag{16}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si l'état d'équilibre relatif considéré fait prendre à la grandeur Φ *une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre en des états voisins du système, où chaque élément a la même température et où la quantité* M *a la même valeur, l'équilibre relatif est stable pour tout dérangement initial qui n'altère ni la température de chaque élément, ni le moment de la quantité de mouvement, et sous la condition que, pendant le mouvement, chaque élément garde une température invariable.*

Dans cet énoncé, deux états, susceptibles de coïncider par une simple rotation autour de l'axe des z, ne sont pas considérés comme deux états distincts, mais comme un même état.

La grandeur Φ n'étant déterminée qu'à une constante près, nous pouvons déterminer cette constante de telle sorte que, dans l'état d'équilibre considéré, $\Phi = 0$.

Donnons au système un dérangement initial soumis aux conditions indiquées dans l'énoncé; les grandeurs $\mathcal{F}$, Ω, W, Φ prennent, à l'instant t_1, à la suite de ce dérangement, des valeurs $\mathcal{F}_1$, Ω_1, W_1, Φ_1; la vitesse φ, qui était nulle dans l'état d'équilibre relatif, prend une valeur φ_1 et, selon les égalités (4) et (8), la force vive initiale a la valeur

$$(17) \qquad \mathfrak{T}_1 = W_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm.$$

Durant le mouvement pris par le système à partir de cette perturbation, la température de chaque élément de masse dm demeure invariable; dès lors, nous pouvons écrire, à chaque instant t de ce mouvement,

$$(18) \qquad \mathcal{F} + \Omega + \mathfrak{T} = \mathcal{F}_1 + \Omega_1 + \mathfrak{T}_1 + \theta,$$

θ étant le travail effectué par les actions de viscosité entre l'instant t_1, où la perturbation a pris fin, et l'instant considéré t.

En vertu des égalités (4), (8), (16) et (17), cette égalité peut s'écrire

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2 \, dm = \Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm + \theta$$

ou bien encore

$$(19) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2 \, dm - \theta = \Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2 \, dm.$$

En outre, comme les actions extérieures auxquelles le système est soumis sont supposées de moment nul par rapport à Oz, le moment de la quantité de mouvement du système par rapport au même axe demeurera égal à M.

Nous allons rapporter chaque point matériel à des coordonnées

qui ne changent pas lorsque le système subit une rotation d'ensemble autour de l'axe des z, une telle rotation étant considérée comme ne changeant en rien l'état du système.

Les coordonnées que nous adopterons sont les suivantes :

La coordonnée z;

La distance $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ à l'axe des z;

L'angle ψ que fait un plan passant par l'axe des z et le point matériel considéré avec un plan passant par l'axe des z et un point matériel choisi une fois pour toutes.

Désignons par r_0, ψ_0, z_0 les coordonnées d'un point de la particule dm dans l'état d'équilibre relatif;

Par r_1, ψ_1, z_1 les coordonnées de la même masse matérielle à l'instant t_1; par ω_1 sa vitesse angulaire de rotation autour de Oz au même instant;

Par r, ψ, z les coordonnées du même élément à un instant quelconque t; par ω la vitesse angulaire de rotation au même instant.

Soient ε, σ, χ, ζ, f, des quantités positives quelconques.

Nous allons prouver que l'on peut choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs positives si petites que les conditions

$$(20) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |\omega_1 - \omega_0| < \varepsilon_1, \quad |\varphi_1| < f_1, \quad |r_1 - r_0| < \sigma_1, \\ \qquad |\psi_1 - \psi_0| < \chi_1, \quad |z_1 - z_0| < \zeta_1 \end{array} \right.$$

entraînent nécessairement les inégalités

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int |\omega - \omega_0| \, dm < \varepsilon, \\ \int |r - r_0| \, dm < \sigma, \\ \int |\psi - \psi_0| \, dm < \chi, \\ \int |z - z_0| \, dm < \zeta, \\ \int |\varphi| \, dm < f, \end{array} \right.$$

quel que soit l'instant t, postérieur à t_1, que l'on considère.

Il est clair que la proposition énoncée sera vraie *a fortiori* si l'on remplace pour la démonstration les quantités ε, σ, χ, ζ par des quantités positives plus petites ; or, comme, par hypothèse, pour

$$(22) \qquad \omega = \omega_0, \qquad r = r_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad z = z_0,$$

Φ atteint une valeur minimum parmi toutes celles qui correspondent à la même valeur de M et que cette valeur minimum est nulle, on peut toujours prendre pour ε, σ, χ, ζ, des valeurs positives assez petites pour que l'on soit assuré d'avoir

$$\Phi > 0$$

toutes les fois que l'on a, avec la valeur considérée de M,

$$\int |\omega - \omega_0|\, dm \leqq \varepsilon,$$

$$\int |r - r_0|\, dm \leqq \sigma,$$

$$\int |\psi - \psi_0|\, dm \leqq \chi,$$

$$\int |z - z_0|\, dm \leqq \zeta,$$

sauf dans le cas particulier où toutes les égalités (22) seront simultanément vérifiées pour toutes les masses élémentaires du système.

Supposons ε, σ, χ, ζ choisis de la sorte.

Considérons l'ensemble des valeurs prises par Φ dans les divers états E du système que définissent les conditions suivantes :

Le moment de la quantité de mouvement par rapport à Oz est égal à M ;

L'une au moins des égalités

$$\int |\omega - \omega_0|\, dm = \varepsilon, \qquad \int |\varphi|\, dm = f,$$

$$\int |r - r_0|\, dm = \sigma, \qquad \int |\psi - \psi_0|\, dm = \chi, \qquad \int |z - z_0|\, dm = \zeta$$

est vérifiée.

Celles de ces égalités qui ne sont pas vérifiées sont remplacées par les inégalités (21) qui leur correspondent.

L'ensemble de ces valeurs de Φ admet forcément une limite inférieure positive P.

On peut toujours supposer, tout d'abord, que l'on ait pris pour ε_1, f_1, σ_1, χ_1, ζ_1 des quantités assez petites pour que l'on ait

$$\int |\omega_1 - \omega_0|\, dm < \varepsilon,$$

$$\int |r_1 - r_0|\, dm < \sigma,$$

$$\int |\psi_1 - \psi_0|\, dm < \chi,$$

$$\int |z_1 - z_0|\, dm < \zeta,$$

$$\int |\varphi_1|\, dm < f.$$

Dès lors, à aucun moment, l'une des inégalités (21) ne pourra cesser d'être vérifiée, à moins qu'à un instant t, compris entre l'instant t_1 et ce moment, le système n'ait passé par un des états que nous avons désignés par E. Il suffit donc de prouver que l'on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour qu'à aucun instant t, postérieur à t_1, le système ne puisse atteindre un état E; et pour cela, il suffit de démontrer qu'on peut prendre ces quantités assez petites pour qu'à aucun instant t, postérieur à t_1, Φ ne puisse atteindre la valeur P.

Or cela est évident.

On peut, en effet, donner à ces quantités des valeurs assez petites pour que l'on ait

$$\Phi_1 + \frac{1}{2}\int \varphi_1^2\, dm < P.$$

Alors, si à un instant t, postérieur à t_1, Φ pouvait atteindre la valeur P, le premier membre de l'égalité (19) serait au moins égal à P, tandis que le second membre serait inférieur à P; l'égalité (19) ne pourrait donc avoir lieu.

3. Variation première, pour une masse fluide, de la fonction $(W + \mathfrak{F} + \Omega)$.

Nous nous proposons d'appliquer cette proposition à une masse fluide animée d'un mouvement de rotation uniforme.

Nous sommes ainsi conduits à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction

$$\mathfrak{F} + \Omega + W$$

prenne une valeur minimum parmi celles qui peuvent correspondre à une même valeur de M.

Si l'on désigne par S la surface qui limite le système, par n_e la normale à cette surface vers l'extérieur du fluide, par Dx, Dy, Dz les composantes du déplacement virtuel d'un point de la surface S; si l'on pose

$$(23) \qquad \Delta = \cos(n_e, x)\, Dx + \cos(n_e, y)\, Dy + \cos(n_e, z)\, Dz;$$

enfin, si l'on désigne par $d\varpi$ un élément du volume occupé par le système, on a, en appliquant le procédé d'Ostrogradsky à l'égalité (5),

$$(24) \qquad \delta M = \int (x^2 + y^2)(\rho\, \delta\omega + \omega\, \delta\rho)\, d\varpi + \int (x^2 + y^2)\rho\omega\Delta\, dS,$$

la première intégrale s'étendant au volume du système et la seconde à la surface qui le termine.

La même méthode, appliquée à l'égalité (8), donne

$$(25) \qquad \delta W = \int \omega(x^2 + y^2)\left(\rho\, \delta\omega + \frac{\omega}{2}\, \delta\rho\right) d\varpi + \frac{1}{2}\int (x^2 + y^2)\rho\omega^2\Delta\, dS.$$

Ces égalités sont générales; mais si, avant la variation, la vitesse angulaire de rotation ω a la même valeur ω_0 pour tous les points du

système, on peut écrire

$$(26)\qquad \delta W = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\,\delta\rho\, d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\Delta\, dS + \omega_0\,\delta M$$

et, si M est assujetti à demeurer invariable dans la modification considérée,

$$(27)\qquad \delta W = -\frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\,\delta\rho\, d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\Delta\, dS.$$

Quant à $\delta(\mathcal{F}+\Omega)$, son expression a été donnée ailleurs ([1]), sous la condition que la température du fluide soit *uniforme*. Supposons, pour simplifier, que la variable s, introduite en cet endroit, n'intervienne pas. Nous aurons, en désignant par V la fonction potentielle intérieure, par U la fonction potentielle extérieure, par $\mathcal{A}$ l'*action comprimante*,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta(\mathcal{F}+\Omega) = & \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A}\right]\delta\rho\, d\varpi \\ & + \int[\rho(V+U+\zeta)+P]\Delta\, dS. \end{aligned}\right.$$

L'égalité

$$(15)\qquad \delta(\mathcal{F}+W+\Omega) = 0$$

devient alors

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} & \int\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\zeta) + V + U - \rho\mathcal{A} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)\right]\delta\rho\, d\varpi \\ & \quad + \int\left\{\rho\left[V+U+\zeta-\frac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)\right]+P\right\}\Delta\, dS = 0. \end{aligned}\right.$$

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [égalité (31)]. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 159; 1897.)

Cette égalité (30) doit avoir lieu sous les deux conditions suivantes :

1° La masse du fluide demeure invariable :

$$\int \delta\rho \, d\varpi + \int \rho \Delta \, dS = 0. \tag{30}$$

2° La quantité M garde une valeur invariable, ce qui peut s'écrire, en vertu de l'égalité (24),

$$\left\{ \begin{aligned} &\omega_0 \int (x^2 + y^2) \, \delta\rho \, d\varpi + \omega_0 \int \rho (x^2 + y^2) \Delta \, dS \\ &\qquad + \int \rho (x^2 + y^2) \, \delta\omega \, d\varpi = 0. \end{aligned} \right. \tag{31}$$

Mais il est inutile de mentionner cette dernière condition : en effet, quelle que soit la valeur de $\delta\rho$ en chaque point du volume fluide, quelle que soit la valeur de Δ en chaque point de la surface terminale, on peut toujours choisir la valeur de $\delta\omega$, qui ne figure point dans les égalités (29) et (30), de telle sorte que la condition (31) soit vérifiée. On retombe alors sur un problème analogue à celui que nous avons traité dans notre écrit précédemment cité et l'on parvient au résultat suivant :

Il existe une constante C *telle que l'on ait :*

1° *En tout point de la surface terminale du fluide, l'égalité*

$$\rho \left[V + U + \zeta - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) \right] + P + \rho C = 0; \tag{32}$$

2° *En tout point de la masse fluide, l'égalité*

$$\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho\zeta) + V + U - \rho \mathcal{A} - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + C = 0. \tag{33}$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le fluide, animé d'un mouvement de rotation uniforme, soit en équilibre relatif.

4. Variation seconde de la fonction $(W + \mathcal{F} + \Omega)$.

De l'égalité (24) on déduit

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 M = & \int (x^2+y^2)(\rho\,\delta^2\omega + 2\,\delta\rho\,\delta\omega + \omega\,\delta^2\rho)\,d\varpi \\
& + 2\int (x^2+y^2)(\rho\,\delta\omega + \omega\,\delta\rho)\,\Delta\,dS \\
& + \int \Big\{ 2\rho\omega(x\,Dx + y\,Dy) + (x^2+y^2) \\
& \qquad \times \Big[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega)\,Dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega)\,Dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega)\,Dz\Big]\Big\}\,\Delta\,dS \\
& + \int \rho\omega(x^2+y^2)\,D(\Delta\,dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où, initialement, ω a en tout point la même valeur ω_0,

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 M = & \int (x^2+y^2)(\rho\,\delta^2\omega + 2\,\delta\rho\,\delta\omega)\,d\varpi \\
& + \omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta^2\rho\,d\varpi \\
& + 2\int (x^2+y^2)\,\rho\,\delta\omega\,\Delta\,dS + 2\,\omega_0 \int (x^2+y^2)\,\delta\rho\,\Delta\,dS \\
& + \omega_0 \int \Big[2\rho(x\,Dx + y\,Dy) \\
& \qquad + (x^2+y^2)\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x}\,Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}\,Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}\,Dz\Big)\Big]\,\Delta\,dS \\
& + \omega_0 \int (x^2+y^2)\,\rho\,D(\Delta\,dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Si la variation considérée est assujettie à laisser M invariable, on devra avoir

$$
(36)\qquad \delta^2 M = 0.
$$

En partant de l'égalité (25), nous trouvons

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {} & \int (x^2+y^2)\left[\rho(\delta\omega)^2 + 2\omega\,\delta\rho\,\delta\omega + \rho\omega\,\delta^2\omega + \frac{\omega^2}{2}\delta^2\rho\right] d\varpi \\
& + \int (x^2+y^2)(\omega^2\,\delta\rho + 2\rho\omega\,\delta\omega)\,\Delta\,dS \\
& + \int \Big\{ \rho\omega^2(x\,Dx + y\,Dy) \\
& \qquad + \frac{x^2+y^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega^2)Dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega^2)Dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega^2)Dz\right]\Big\}\Delta\,dS \\
& + \frac{1}{2}\int (x^2+y^2)\rho\omega^2\, D(\Delta\,dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où, initialement, ω a, en tout point, la même valeur ω_0,

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {} & \int (x^2+y^2)\rho(\delta\omega)^2 \\
& + \omega_0 \Big\{ \int (x^2+y^2)\left(2\,\delta\rho\,\delta\varpi + \rho\,\delta^2\omega + \frac{\omega_0}{2}\delta^2\rho\right) d\varpi \\
& \quad + \int (x^2+y^2)(\omega_0\,\delta\rho + 2\rho\,\delta\omega)\,\Delta\,dS \\
& \quad + \int \Big[\rho\omega_0(x\,Dx + y\,Dy) \\
& \qquad + \frac{\omega_0(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}Dz\right)\Big]\Delta\,dS \\
& \quad + \frac{1}{2}\int (x^2+y^2)\rho\omega_0\, D(\Delta\,dS)\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, en outre, la variation doit laisser invariable la quantité M, cas auquel l'égalité (36) est vérifiée, on a

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2 W = {} & \int (x^2+y^2)\rho(\delta\omega)^2\, d\varpi - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\,\delta^2\rho\, d\varpi \\
& - \omega_0^2 \int \Big[(x^2+y^2)\,\delta\rho + \rho(x\,Dx + y\,Dy) \\
& \qquad + \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z}Dz\right)\Big]\Delta\,dS \\
& - \frac{\omega_0^2}{2}\int (x^2+y^2)\rho\, D(\Delta\,dS).
\end{aligned}
\right.
$$

Quant à l'expression de $\delta^2(\mathcal{F}+\Omega)$, nous l'avons déjà formée ailleurs [1] sous la condition que la température du fluide soit uniforme; en laissant de côté la variable s, introduite en cet endroit, et en gardant les notations qui s'y trouvent employées,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = &\int\left(V+U+\zeta+\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}-\rho\mathcal{A}\right)\delta^2\rho\, d\varpi\\ &+\int\left(V+U+\zeta+\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}-\rho\mathcal{A}\right)\\ &\quad\times\left(2\delta\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho}{\partial z}Dz\right)\Delta\, dS\\ &+\int[\rho(V+U+\zeta)+P]\,D(\Delta\, dS)\\ &+\int\left(2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}-2\mathcal{A}-\rho\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho}\right)(\delta\rho)^2\, d\varpi\\ &-\int\rho[(X_i+X_e)Dx+(Y_i+Y_e)Dy+(Z_i+Z_e)Dz]\Delta\, dS\\ &+2Y.\end{aligned}\right.$$

Ainsi donc, pourvu :

1° Que la température uniforme du fluide demeure constante durant la variation virtuelle;

2° Que la quantité ω ait, initialement, la même valeur ω_0 en tous les points de la masse fluide;

3° Que la variation virtuelle laisse invariable la quantité M;

nous pouvons écrire les expressions (39) et (40) de $\delta^2 W$ et de $\delta^2(\mathcal{F}+\Omega)$; en les réunissant, nous aurons l'expression de

$$\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+W).$$

Désignons par

$$X_e=\omega_0^2 x,\qquad Y_e=\omega_0^2 y,\qquad Z_e=0$$

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [égalité (57)]. (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, p. 169; 1897.)

les composantes du champ centrifuge, et posons

$$(41)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = X_i + X_e + X_c, \\ \mathfrak{Y} = Y_i + Y_e + Y_c, \\ \mathfrak{Z} = Z_i + Z_e + Z_c. \end{cases}$$

Nous aurons

$$(42)\quad \begin{cases} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega + W) \\ \quad = \int \left[V + U + \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho\zeta) - \rho\mathcal{A} - \dfrac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) \right] \delta^2\rho\, d\varpi & (1) \\ \quad + \int \left[V + U + \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho\zeta) - \rho\mathcal{A} - \dfrac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) \right] \\ \qquad \times \left(2\,\delta\rho + \dfrac{\partial\rho}{\partial x} Dx + \dfrac{\partial\rho}{\partial y} Dy + \dfrac{\partial\rho}{\partial z} Dz \right) \Delta\, dS & (2) \\ \quad + \int \left\{ \rho \left[V + U + \zeta - \dfrac{\omega_0^2}{2}(x^2+y^2) \right] + P \right\} D(\Delta\, dS) & (3) \\ \quad + \int \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} [\rho(\zeta - \mathcal{A})] (\delta\rho)^2 d\varpi & (4) \\ \quad - \int \rho(\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz) \Delta\, dS & (5) \\ \quad + 2\,Y & (6) \\ \quad + \int (x^2 + y^2)\rho(\delta\omega)^2 d\varpi & (7) \end{cases}$$

La masse du fluide doit, dans la modification virtuelle considérée, demeurer invariable, ce qui entraîne l'égalité (30) et celle-ci, qui s'en déduit :

$$(43)\quad \begin{cases} \int \delta^2\rho\, d\varpi \\ \quad + \int \left(2\,\delta\rho + \dfrac{\partial\rho}{\partial x} Dx + \dfrac{\partial\rho}{\partial y} Dy + \dfrac{\partial\rho}{\partial z} Dz \right) \Delta\, dS \\ \quad + \int \rho\, D(\Delta\, dS) \qquad = 0. \end{cases}$$

L'expression (42) de $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + W)$ se simplifie beaucoup dans le

cas où l'état initial de la masse fluide est un état d'équilibre relatif; dans ce cas, en effet, les égalités (32) et (33) transforment les termes (1), (2) et (3) de l'expression (42) en

$$- C\left[\int \delta^2 \rho \, d\varpi + \int \left(2\,\delta\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho}{\partial z} Dz\right)\Delta\, dS + \int \rho\, D(\Delta\, dS)\right]$$

et, en vertu de l'égalité (43), cette dernière expression se réduit à o.

Si donc, à partir d'un état d'équilibre relatif où tous ses points tournent avec la même vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe des z, une masse fluide éprouve une variation virtuelle qui laisse invariable la température de chaque élément et qui ne change pas la valeur de la quantité M, on a

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta^3(\mathcal{F} + \Omega + W) = & \int (x^2 + y^2)\,\rho(\delta\omega)^2\, d\varpi \\ & + \int \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\rho(\zeta - \mathfrak{A})](\delta\rho)^2\, d\varpi \\ & - \int \rho(\mathfrak{X}\, Dx + \mathfrak{Y}\, Dy + \mathfrak{Z}\, Dz)\Delta\, dS \\ & + 2Y. \end{aligned} \right.$$

Les variations qui figurent au second membre sont liées par les conditions

$$(30)\quad \int \delta\rho\, d\varpi + \int \rho\Delta\, dS = 0,$$

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta M = \omega_0 & \left[\int (x^2 + y^2)\,\delta\rho\, d\varpi + \int (x^2 + y^2)\,\rho\Delta\, dS\right] \\ & + \int (x^2 + y^2)\,\rho\,\delta\omega\, d\varpi = 0. \end{aligned} \right.$$

5. Conditions pour que la fonction $(\mathfrak{F} + \Omega + W)$ soit un minimum.

Pour que, dans l'état d'équilibre initial, la fonction $(\mathfrak{F} + \Omega + W)$ ait une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans que la température de chaque élément éprouve aucun changement et sans que la valeur de M éprouve de variations, il faut et il suffit que le second membre de l'égalité (44) soit positif toutes les fois que les égalités (30) et (45) sont vérifiées.

Quelques propositions s'aperçoivent immédiatement et, en premier lieu, celle-ci :

Pour que la fonction $(\mathfrak{F} + \Omega + W)$ soit minimum dans les conditions indiquées, IL SUFFIT *que l'on ait*

$$(46) \quad \int \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}[\rho(\zeta - \mathcal{A})](\delta\rho)^2 d\varpi - \int \rho(\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz)\Delta\,dS + 2\Upsilon > 0$$

en toute variation virtuelle où l'on a

$$(47) \qquad \int \delta\rho\, d\varpi + \int \rho\Delta\, dS = 0.$$

Dans le cas où les divers éléments du fluide n'exercent l'un sur l'autre aucune action et où, par conséquent, $\mathcal{A} = 0$, $\Upsilon = 0$, nous savons [1] remplacer cette condition par d'autres. Si l'on tient compte de ces résultats et de ceux qui ont été établis au § 2 du présent écrit, on peut énoncer le théorème suivant :

Considérons une masse fluide dont les divers éléments n'exercent les uns sur les autres aucune action; supposons que tous les éléments qui forment cette masse tournent avec une même vitesse angulaire autour de l'axe des z et que la masse fluide soit en équilibre relatif; cet équilibre sera assurément stable pour tout déran-

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § 5 et 7 (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 131; 1895).

gement qui n'altère pas le moment de la quantité de mouvement, si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho\zeta) \tag{48}$$

n'est négative en aucun point de la masse fluide; les points où elle est nulle ne forment pas un domaine continu à trois dimensions.

2° *La quantité*

$$\mathfrak{M}_e = \mathfrak{X}\cos(n_e, x) + \mathfrak{Y}\cos(n_e, y) + \mathfrak{Z}\cos(n_e, z) \tag{49}$$

n'est positive en aucun point de la surface libre du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas sur cette surface une aire continue.

Il est permis de supposer que l'on a, en tout point de la masse fluide,

$$\delta\omega = 0;$$

mais alors la condition (45) exige que l'on ait l'égalité

$$\int (x^2 + y^2)\,\delta\rho\,d\varpi + \int (x^2 + y^2)\,\rho\Delta\,dS = 0. \tag{50}$$

On voit donc que, *pour que la fonction* $\Phi = \mathfrak{F} + \Omega + W$ *ait une valeur minimum dans les conditions indiquées, il est nécessaire que l'on ait*

$$\left\{\begin{aligned} &\int \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\rho(\zeta - \lambda)](\delta\rho)^2\,d\varpi \\ &\quad - \int \rho(\mathfrak{X}\,Dx + \mathfrak{Y}\,Dy + \mathfrak{Z}\,Dz)\Delta\,dS + 2Y > 0, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

toutes les fois que l'on a les deux égalités

$$\int \delta\rho\,d\varpi + \int \rho\Delta\,dS = 0, \tag{30}$$

$$\int (x^2 + y^2)\,\delta\rho\,d\varpi + \int (x^2 + y^2)\,\rho\Delta\,dS = 0. \tag{50}$$

Pour que cette condition soit remplie, certaines autres conditions sont nécessaires; elles peuvent être établies suivant des raisonnements que nous avons indiqués ailleurs ([1]) et qu'il suffit de modifier très légèrement.

Parmi ces *conditions nécessaires*, celles-ci sont tout à fait générales :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}[\rho(\zeta - \mathcal{A})]$$

ne doit être négative en aucun point de la masse fluide;

2° *La quantité* $\mathfrak{N}_e$, *définie par l'égalité* (49), *ne doit être positive en aucun point de la surface du fluide.*

Lorsque les divers éléments de la masse fluide n'exercent les uns sur les autres aucune action, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité (51) soit conséquence des égalités (30) et (50); ces conditions sont les suivantes :

1° *La quantité*

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho\zeta)$$

n'est négative en aucun point du fluide; les points où elle est nulle ne peuvent remplir un volume d'une manière continue;

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles*, § 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; 1897). La fonction u introduite à la p. 175 devra être soumise non aux conditions (64) et (65), mais aux conditions

$$\int u\, d\varpi = 0, \qquad \int (x^2 + y^2)\, u\, d\varpi = 0.$$

De même, la fonction u introduite à la p. 177 devra être soumise non aux conditions (68) et (69), mais aux conditions

$$\int u\, d\sigma = 0, \qquad \int (x^2 + y^2)\, u\, d\sigma = 0.$$

La condition indiquée sous la rubrique 2°, à la p. 175 et à la p. 177, doit être supprimée aussi bien dans l'écrit auquel nous renvoyons en ce moment que dans le présent écrit.

2° *La quantité $\mathfrak{N}_e$ n'est positive en aucun point de la surface libre du fluide; les points de cette surface où elle est nulle ne peuvent remplir une aire d'une manière continue.*

Ces conditions sont identiques aux conditions suffisantes trouvées il y a un instant. Donc, *dans le cas où les divers éléments du fluide n'agissent pas les uns sur les autres, nous connaissons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'état d'équilibre relatif corresponde à une valeur minimum de* $(\mathfrak{F} + \Omega + W)$ *parmi toutes celles que cette quantité peut prendre sans changement dans la température des divers éléments et sans variation de* M.

Ce que nous avons démontré au § 2 nous permet d'affirmer que l'équilibre relatif est certainement stable pour tous les dérangements qui n'altèrent ni la température T de chaque élément, ni la valeur de M lorsqu'il fait prendre à l'expression $\Phi = \mathfrak{F} + \Omega + W$ une valeur minimum parmi toutes celles qui correspondent aux mêmes valeurs de T et de M. Mais nous n'avons pas démontré la réciproque de ce théorème; nous n'avons pas démontré que Φ devait nécessairement, en l'état d'équilibre relatif considéré, prendre une telle valeur minimum si l'on voulait que cet équilibre fût stable.

On sait quelles difficultés rencontre, dans le cas de l'équilibre absolu, la démonstration de cette réciproque; les difficultés ne sauraient être moindres lorsqu'il s'agit de l'équilibre relatif. Nous nous contenterons donc de *postuler* ici la légitimité de cette réciproque, légitimité que l'étude des petits mouvements rend très vraisemblable.

Moyennant ce postulat, les conditions qui sont nécessaires pour que Φ soit minimum en l'état d'équilibre relatif considéré et sous les conditions indiquées se transforment en conditions nécessaires pour la stabilité de cet équilibre; alors sont légitimées les conclusions que nous avions formulées autrefois (1).

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles*, § 8 (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, p. 189; 1897).

Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini. Premier Mémoire : *Généralités et groupes décomposables;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

Introduction.

Nommons :

1° *Substitution* n — aire (*binaire, ternaire, quaternaire,* etc.) la substitution linéaire, homogène, entre les n variables z_j,

$$s_n = \left| z_j \sum_k a_{jk} z_k \right|, \qquad \text{avec} \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n$$

ou

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0;$$

2° $\mathfrak{G}_n$, le groupe des s_n;

3° G_n, tout groupe d'ordre fini contenu dans $\mathfrak{G}_n$;

4° Π_n, le problème qui consiste à construire les différents G_n.

Le problème Π_2 est résolu depuis longtemps par MM. Klein, Gordan et Jordan.

Π_3 a été résolu par M. Jordan au Tome 84 du *Journal de Crelle*.

M. Jordan a montré aussi (Mémoire précité et Mémoire couronné par l'Académie de Naples) que tous les G_n appartiennent à un nombre de types limité, pour n donné. Abordant ensuite la solution de Π_4, M. Jordan l'a poussée assez loin et ne s'est arrêté qu'au seuil d'une

discussion arithmétique, où il y avait des cas particuliers à examiner par milliers.

Le problème II_4 *général* défiera, à mon avis, encore longtemps les efforts des géomètres. Aussi le présent travail apporte-t-il simplement une contribution à l'étude de *certains* G_4, que j'ai nommés *réguliers*. Ils ont, pour propriété caractéristique, l'existence d'un *invariant absolu* commun.

Si les z sont envisagées comme des coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, les quaternaires régulières ont pour invariant commun un certain complexe linéaire de droites, le complexe *capital*.

On trouvera dans mes Mémoires *Sur l'équation différentielle du premier ordre* insérés au *Journal de l'École Polytechnique* (1re série : 61e, 62e, 63e, 64e Cahiers; 2e série : 2e et 3e Cahiers) et aux *Annales de l'Université de Lyon* (1892), une étude géométrique détaillée des régulières, d'ordre fini ou infini.

Je fais aussi usage, dans les présentes recherches, des mêmes considérations géométriques, qui abrègent beaucoup les discussions de pure algèbre.

M. Jordan dit qu'un groupe G_n est *décomposable* dans l'éventualité suivante : les n variables z, *convenablement choisies*, peuvent se répartir en systèmes s, contenant chacun un nombre de z marqué par le *degré* du système; alors toute s_n de G_n remplace les variables d'un quelconque parmi les systèmes s par des fonctions linéaires et homogènes des variables d'un autre système s'. Suivant la terminologie adoptée, s_n *fait succéder* s' à s. Il est évident que s et s' sont du même degré.

Dans le présent Travail, après quelques explications générales sur les groupes quaternaires G_4 réguliers et d'ordre fini, je construis *tous les* G_4 *décomposables*.

Cette recherche, comme on le voit au cours du présent Travail, se ramène aux principes de M. Jordan par une discussion géométrique relativement facile. Par contre, comme le montrera un Mémoire ultérieur, la construction des groupes indécomposables exige, en outre, des méthodes spéciales.

Voilà pourquoi la matière du présent Travail est nettement circonscrite.

En ce qui concerne les groupes décomposables, voici l'énumération, pour un choix approprié de variables :

On trouve d'abord deux types à existence évidente *a priori*.

I.

G_1 provient de régulières

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3 & a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4 & a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1,$$

où les groupes P et Q dérivés respectivement des binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

sont d'ordre fini.

II.

On combine un groupe $\mathfrak{A}$ du type I avec une régulière unique

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{42}x_2 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = -1.$$

$\mathfrak{A}$ est permutable à $\mathcal{B}$ et contient $\mathcal{B}^2$. Les groupes P et Q ci-dessus

sont transformés l'un dans l'autre par les binaires

$$\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

Viennent ensuite deux types qui admettent une quadrique invariante, $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$.

III.

Le groupe provient de régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11} x_1 + a_{13} x_3 \\ x_2 & \rho a_{33} x_2 + \rho a_{31} x_4 \\ x_3 & a_{31} x_1 + a_{33} x_3 \\ x_4 & \rho a_{13} x_2 + \rho a_{11} x_4 \end{vmatrix}$$

où

$$\rho^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{racine de l'unité},$$

le groupe binaire des substitutions

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

étant d'ordre fini.

IV.

Le groupe s'obtient en combinant un groupe $\mathfrak{A}$ du type III avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12} x_2 + b_{14} x_4 \\ x_2 & \sigma b_{34} x_1 + \sigma b_{32} x_3 \\ x_3 & b_{32} x_2 + b_{34} x_4 \\ x_4 & \sigma b_{14} x_1 + \sigma b_{12} x_3 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} = -\sigma^{-1}.$$

$\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{B}^2$ et est permutable à $\mathfrak{B}$.

Le dernier type de l'énumération est d'ordre quarante-huit et isomorphe au groupe général des déplacements entre quatre lettres.

V.

Le groupe s'obtient en transformant le groupe *irrégulier* dérivé des trois substitutions

$$\left|\begin{matrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_4 \\ z_4 & z_1 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{matrix}\right| \qquad (i^2+1=0),$$

par la substitution

$$\left|\begin{matrix} z_1 & x_1+\tau x_2+\tau x_4 \\ z_2 & x_1+\tau\theta^2 x_3+\tau\theta x_4 \\ z_3 & x_1+\tau\theta x_3+\tau\theta^2 x_4 \\ z_4 & x_2 \end{matrix}\right| \qquad \left(3\tau^2=\theta-\theta^2,\ \theta=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

qui réintroduit les variables x, analogues à celles des quatre premiers types.

On voit que (sauf pour le type V, dont la structure est parfaitement déterminée) dans l'expression des groupes décomposables ne figurent jamais que des groupes binaires et jamais ternaires. Ce résultat est précieux et voici pourquoi : en vertu des méthodes de M. Jordan, la discussion des groupes indécomposables est fondée sur celle des groupes décomposables. On se trouve donc affranchi, pour le problème général des G_4 réguliers, de l'incertitude qui subsiste encore sur la liste complète des groupes ternaires d'ordre fini.

Un travail ultérieur sera consacré aux groupes réguliers d'ordre fini indécomposables ou généraux.

CHAPITRE I.

RÉGULARITÉ ALGÉBRIQUE.

1. Considérons une substitution s_n linéaire n — aire (binaire, ternaire, quaternaire, ...), c'est-à-dire à n variables homogènes, savoir :

$$s_n = \left| x_i \quad \sum_j a_{ij} x_j \right| \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant des n^2 constantes a_{ij} étant $\neq 0$.

Je nommerai $A \neq 0$ ce déterminant et poserai

$$A_{ij} = \frac{\partial A}{\partial a_{ij}}.$$

Pour plus de commodité, dans divers cas, on désignera s_n par plusieurs notations différentes :

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Si l'on nomme $s_n[P]$ ce que devient par l'effet de s_n une fonction homogène P des x_i, on aura

$$s_n[x_i] = \sum_j a_{ij} x_j$$

et l'on pourra écrire

$$s_n = | x_i \quad s_n[x_i] |.$$

2. Nommons *transposée* s'_n de s_n la substitution

$$s'_n = (a_{ji}) = (a'_{ij}).$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux s_n quelconques, on vérifiera sans peine que

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$$

la transposée d'un produit est identique avec le produit des transposées des facteurs pris en ordre inverse.

Par suite $(\mathcal{A}')^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})'$: *la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée.*

C'est d'ailleurs évident, car si $\mathcal{A} = (a_{ij})$, on a

$$\mathcal{A}' = (a_{ji}), \qquad \mathcal{A}'^{-1} = (A^{-1}A_{ij}),$$
$$\mathcal{A}^{-1} = (A^{-1}A_{ji}), \qquad (\mathcal{A}^{-1})' = (A^{-1}A_{ij}).$$

3. Prenons maintenant une quaternaire

$$\mathcal{A} = (a_{ij}) \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant A des a_{ij} étant $\neq 0$.

Je dis que $\mathcal{A}$ est *régulière* si $\mathcal{A}$ admet pour invariant la forme bilinéaire

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

des huit quantités quelconques x_i et y_i. Autrement dit, une régulière doit reproduire (xy) à un facteur constant près.

Cherchons les conditions de régularité.

4. Avec les notations du n° **1**, on a

$$\mathcal{A}[(xy)] = \sum_i \sum_j x_i y_j \{a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} - a_{3i}a_{4j} + a_{4i}a_{3j}\}.$$

Posons

$$(ij) = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} a_{3i} & a_{3j} \\ a_{4i} & a_{4j} \end{vmatrix},$$
$$p_{ij} = -p_{ji} = (ij) - (ij)',$$

avec les relations connues

$$0 = (12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = (12)'(34)' + \ldots$$
$$(12)(34)' + (23)(14)' + (31)(24)' + (12)'(34) + (23)'(14) + (31)'(24) = A.$$

Il viendra

$$A\{(xy)\} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}.$$

Mais

$$(xy) = \sum_j u_j y_j$$

avec

$$u_1 = -x_2, \qquad u_2 = x_1, \qquad u_3 = x_4, \qquad u_4 = -x_3.$$

On doit donc avoir

$$\sum_i x_i p_{ij} = M u_j,$$

c'est-à-dire le système

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} & (p_{21}+M)x_2 + & p_{31}\, x_3 + & p_{41}\, x_4 & = 0,\\ (p_{12}-M)x_1 & & + \; p_{32}\, x_3 + & p_{42}\, x_4 & = 0,\\ p_{13}\, x_1 + & p_{23}\, x_2 & & + (p_{43}-M)x_4 & = 0,\\ p_{14}\, x_1 + & p_{24}\, x_2 + & (p_{34}+M)\, x_3 & & = 0. \end{array}\right.$$

Le déterminant des coefficients des x dans le système (1) est gauche et l'on a

$$\begin{aligned} 0 = {} & (p_{21}+M)(p_{43}-M) + p_{13}p_{42} + p_{32}p_{41} \\ = {} & -M^2 + M(p_{43}-p_{21}) + p_{21}p_{43} + \ldots, \\ & p_{21}p_{43} + \ldots = \{(12)-(12)'\}\{(34)-(34)'\} + \ldots \\ = {} & (12)(34) + \ldots + (12)'(34)' + \ldots - (12)(34)' - (12)'(34) \ldots \\ = {} & -A. \end{aligned}$$

Finalement

$$M^2 - MK^0 + A = 0$$

avec

$$K^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)' = p_{12} - p_{34}.$$

Les quatre égalités du système (1) sont des identités en x_i; il vient

$$0 = p_{23} = p_{14} = p_{31} = p_{24} = p_{21} + M = p_{43} - M.$$

On tire de là

$$(2)\qquad \begin{cases} p_{12}=(12)-(12)'=\quad M \\ p_{34}=(34)-(34)'=-M \end{cases},$$

$$(3)\qquad \begin{cases} (12)'=(12)-M \\ (34)'=(34)+M \end{cases},$$

$$(23)'=(23),\qquad (14)'=(14),$$

$$(31)'=(31),\qquad (24)'=(24).$$

L'égalité

$$(12)'(34)'+(23)'(14)'+(31)'(24)'=0$$

devient

$$0=[(12)-M][(34)+M]+(23)(14)+(31)(24)=M(M-K),$$

$$K=(12)-(34).$$

On ne peut avoir $M=0$ puisque

$$0=M^2-M(p_{12}-p_{34})+A \qquad \text{avec} \qquad A\neq 0.$$

Donc, sous le bénéfice de (2),

$$M=K,\qquad p_{12}-p_{34}=2M,\qquad M^2=A,$$

et, sous le bénéfice de (3),

$$(12)'=(34),\qquad (34)'=(12).$$

5. En résumé, les conditions de régularité sont

$$(12)'=(34),\qquad (23)'=(23),\qquad (31)'=(31),$$

$$(34)'=(12),\qquad (14)'=(14),\qquad (24)'=(24).$$

$\mathcal{A}$ multiplie l'invariant (xy) par le facteur

$$K=(12)-(34)=A^{\frac{1}{2}},$$

racine carrée du déterminant de $\mathcal{A}$.

6. Nommons, avec M. Jordan, *singulière* ρ, toute quaternaire (ou

même toute n — aire) qui multiplie toutes les variables par un même facteur ρ. Toute singulière est à la fois régulière et échangeable à une quaternaire quelconque.

Si la régulière $\mathcal{A} = (a_{ij})$ multiplie l'invariant (xy) par le facteur K [$K^2 = A$, $\mathcal{A}$ = déterminant de $\mathcal{A}$], la régulière $\rho\mathcal{A} = (\rho a_{ij})$ multiplie (xy) par $\rho^2 K$. Le déterminant de $\rho\mathcal{A}$ est

$$\rho^4 A = (\rho^2 K)^2.$$

Si donc je choisis pour ρ la valeur $K^{-\frac{1}{2}}$ ou $A^{-\frac{1}{4}}$, la régulière $\rho\mathcal{A}$ aura la double propriété :

1° D'avoir l'unité pour valeur du déterminant;

2° D'admettre (xy) pour invariant *absolu*.

Toutes les régulières que je considérerai dorénavant posséderont, par hypothèse, les propriétés qui viennent d'être dites. On supposera toujours

$$K = (12) - (34) = A = 1.$$

7. En définitive, nous écrirons pour conditions de régularité

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} & (12) - (34) = 1 & \\ (12)' = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \end{array} \right\}.$$

Si l'on a satisfait aux deux dernières équations des deux dernières lignes du système (o), l'égalité identique

$$(12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' = 0$$

se réduit, sous le bénéfice de $(12)(34) + \ldots = 0$, à l'identité

$$(12)'(34)' = (12)(34),$$

et il suffit de satisfaire à l'une des deux premières équations des deux dernières lignes du système (o) pour satisfaire à l'autre équation.

Les sept conditions du système (o) *se réduisent à six distinctes.*

La régulière générale comporte dix paramètres; il y a dans l'espace ∞^{10} régulières.

Il y en aurait ∞^{11}, si l'on n'astreignait plus xy à être un invariant absolu.

8. Nommons ε la régulière

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon^2 = | x_i \qquad -x_i | = \text{singulière},$$

et $\mathcal{A}'$ la *transposée* de $\mathcal{A}$ (n° **2**).

Les conditions de régularité expriment que

$$\mathcal{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1}\mathcal{A}\varepsilon = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{42} & a_{41} & a_{44} & -a_{43} \\ a_{32} & -a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

De là

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \mathrm{A}_{11} + \ldots + \mathrm{A}_{44},$$

et l'équation caractéristique

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \rho \end{vmatrix}$$

$$= \rho^4 - \mathrm{S}_1\rho^3 + \mathrm{S}_2\rho^2 - \mathrm{S}_3\rho + 1 = 0,$$

avec

$$\mathrm{S}_1 = a_{11} + \ldots + a_{44}, \qquad \mathrm{S}_3 = \mathrm{A}_{11} + \ldots + \mathrm{A}_{44},$$

est *réciproque*.

9. Si deux régulières $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ admettent (xy) pour invariant, il en est de même pour le produit $\mathcal{A}\mathcal{B}$. Donc *les régulières forment un groupe,* le groupe *régulier*.

Le but principal de ces recherches est de construire les groupes réguliers d'ordre fini.

Soit G un pareil groupe, construit, comme il est stipulé au n° 6, pour (xy) invariant absolu. G contiendra un faisceau Φ de substitutions singulières.

Si l'on n'astreint plus (xy) à être un invariant absolu, cela revient (n° 6) à multiplier chaque régulière de G par une certaine singulière. La constitution du faisceau Φ subit seule une modification.

Soit, pour (xy) invariant absolu, une singulière

$$| x_i \quad \rho x_i |,$$

il faudra avoir $\rho^2 = 1$; Φ contiendra une ou deux régulières, savoir l'unité et

$$\mathcal{K} = | x_i \quad -x_i |.$$

CHAPITRE II.

RÉGULARITÉ GÉOMÉTRIQUE.

10. Dans un espace ordinaire $\mathcal{E}$ à trois dimensions, prenons des coordonnées homogènes, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{coordonnées-points } x_i \text{ d'un point } x \\ \text{coordonnées-plans } u_i \text{ d'un plan } u \end{array} \right\}.$$

La valeur absolue des coordonnées sera donnée par les relations

$$x_0 = \sum_i e_i x_i = \sum e x = 1,$$

$$u_0 = \sum h u = 1,$$

les coefficients numériques e_i et h_i étant arbitrairement fixés une fois pour toutes.

Si une droite g de $\mathcal{E}$ est l'intersection de deux *plans* a et b, g aura

pour ses six coordonnées-plans homogènes les six déterminants

$$\{ij\} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_i \end{vmatrix}$$

$$(12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = 0.$$

Si g passe par les deux *points* a et b, elle aura pour coordonnées-points homogènes les six déterminants

$$\{ij\}^0 = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Pour une même droite, les coordonnées-plans $\{ij\}$ et les coordonnées-points $\{ij\}^0$ satisfont aux relations

$$\frac{\{12\}^0}{\{34\}} = \frac{\{34\}^0}{\{12\}} = \frac{\{23\}^0}{\{14\}} = \frac{\{14\}^0}{\{23\}} = \frac{\{31\}^0}{\{24\}} = \frac{\{24\}^0}{\{31\}}.$$

11. Tout cela rappelé, nommons *capitale* toute droite pour laquelle on a

$$\{12\} - \{34\} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \{12\}^0 - \{34\}^0 = 0.$$

Le lieu des capitales est un complexe linéaire *capital* dont l'équation s'écrit

$$\{12\} - \{34\} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \{12\}^0 - \{34\}^0 = 0.$$

La théorie générale des complexes linéaires nous apprend que les droites capitales

situées dans un plan M, passent toutes par un même point m, *centre* de M.	passant par un point m sont toutes situées dans un plan M, *plan central* de m.

Le centre du plan u est le point ξ

$$u_2, \quad -u_1, \quad -u_4, \quad u_3.$$

En effet, si y est un point de u, on a pour la droite $y\xi$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_2 & -u_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ -u_4 & u_3 \end{vmatrix} = |12|^0 - |34|^0$$
$$= -\Sigma uy = 0.$$

Pareillement le plan central du point x a pour coordonnées

$$x_2, \quad -x_1, \quad -x_4, \quad x_3.$$

Si m est le centre du plan M, on a

$$M_i = \varepsilon[m_i],$$

ε étant la substitution ainsi désignée au n° **8** et les crochets [ ] ayant la signification marquée au n° **1**.

12. On sait aussi que les droites de l'espace $\mathcal{E}$ sont deux à deux (g et g') *conjuguées* par rapport au complexe capital.

g' est le lieu des centres pour les plans passant par g (et réciproquement).

Une capitale coïncide avec sa conjuguée.

Si g est l'intersection des deux plans a et b, le plan M de coordonnées $a_i + \mu b_i$ tourne autour de g quand μ varie. Le centre m de M a pour coordonnées

$$m_1 = a_2 + \mu b_2, \qquad -m_2 = a_1 + \mu b_1,$$
$$-m_3 = a_4 + \mu b_4, \qquad m_4 = a_3 + \mu b_3.$$

Le lieu du point m est une droite dont les $|ij|^0$ sont les déterminants de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \end{Vmatrix},$$

On a donc pour les coordonnées-plans $|ij|$ correspondantes

de g' $|34|$ $|12|$ $|23|$ $|14|$ $|31|$ $|24|$.

de g $|12|$ $|34|$ $|23|$ $|14|$ $|31|$ $|24|$.

13. Nommons :

$\mathfrak{T}$ le tétraèdre de référence;
T_i la face $x_i = 0$ de $\mathfrak{T}$;
τ_i le sommet de $\mathfrak{T}$ opposé à la face T_i;
g_{ij} l'arête $x_i = x_j = 0$ de $\mathfrak{T}$.

On voit immédiatement que :

g_{12} et g_{34} sont conjuguées et non capitales;
g_{23}, g_{14}, g_{31}, g_{24} sont capitales;
τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 sont respectivement les centres des faces T_2, T_1, T_4, T_3.

Pour éviter des redites, nous conserverons constamment les notations du présent numéro.

Je nommerai *tétraèdre normal* $\mathfrak{N}$ tout tétraèdre où deux arêtes opposées sont conjuguées. Les quatre autres sont alors capitales. Le tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ est normal.

14. Si je fais (ce qui m'arrivera quelquefois) usage d'un tétraèdre de référence qui ne sera pas forcément normal, les coordonnées-points seront désignées non plus par x_i mais (afin d'avertir le lecteur) par z_i.

15. Nommons *courbe intégrante* toute courbe ayant ses tangentes capitales. Les intégrantes sont évidemment caractérisées par la relation infinitésimale

$$(x\,dx) = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx_3 & dx_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ quatre fonctions homogènes de degré quelconque λ. Nommons A la substitution *géométrique* qui remplace le point x par le point y, des coordonnées $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$, $\varphi_0 = \Sigma e \varphi$ (**10**), de façon que $\Sigma e y = y_0 = 1$. A s'écrira par le symbole

$$A = |\, x_i \qquad \varphi_0^{-1} \varphi_i \,|.$$

A sera *régulière* si elle change une intégrante quelconque en une autre intégrante.

Je vais montrer que cette définition géométrique de la régularité conduit, pour $\lambda = 1$, précisément à la régularité algébrique, telle qu'elle est définie au Chapitre I.

16. Pour la régularité géométrique, il est nécessaire et suffisant que la relation $(y\,dy) = 0$ soit la conséquence de $(x\,dx) = 0$. Les différentielles dx_i sont quelconques, sous la condition *unique*

$$dx_0 = \Sigma e\,dx = 0.$$

Posons

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j},$$

d'où (th. d'Euler)

$$\lambda \varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} x_j \qquad \text{et} \qquad d\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij}\,dx_j.$$

Ensuite $dy_i = \varphi_0^{-2} \{ \varphi_0\,d\varphi_i - \varphi_i\,d\varphi_0 \}$, puisque $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$, et

$$(y\,dy) = \varphi_0^{-2}(\varphi\,d\varphi).$$

Posons

$$(ij) = \begin{vmatrix} \varphi_{1i} & \varphi_{1j} \\ \varphi_{2i} & \varphi_{2j} \end{vmatrix}, \qquad (ij)' = \begin{vmatrix} \varphi_{3i} & \varphi_{3j} \\ \varphi_{4i} & \varphi_{4j} \end{vmatrix}, \qquad p_{ij} = (ij) - (ij)',$$

il viendra

$$(y\,dy) = \frac{1}{\lambda \varphi_0^2} \sum_{ij} x_i\,dx_j \{ \varphi_{2i}\varphi_{1j} - \varphi_{1i}\varphi_{2j} - \varphi_{4i}\varphi_{3j} + \varphi_{3i}\varphi_{4j} \}$$

$$= \frac{\sum_{ij} x_i\,dx_j\,p_{ji}}{\lambda \varphi_0^2} = \frac{\sum_j \mathrm{U}_j\,dx_j}{\lambda \varphi_0^2}.$$

Cette expression linéaire et homogène en dx_j doit être une combinaison linéaire et homogène de $(x\,dx)$ et de $dx_0 = \Sigma e\,dx$. Il doit exister deux fonctions M et ρ des x_i telles que l'on ait identiquement

entre les dx_j

$$\Sigma U\,dx = M(x\,dx) + \rho\Sigma e\,dx,$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \quad Mx_2 + \rho e_1 \\ U_2 &= -Mx_1 + \rho e_2 \\ U_3 &= -Mx_4 + \rho e_3 \\ U_4 &= \quad Mx_3 + \rho e_4 \end{aligned}\right\}, \qquad U_j = \sum_i x_i p_{ji}.$$

L'expression $\Sigma U x \equiv 0$ comme proportionnelle à $(\varphi\varphi)$;

$$\Sigma e x = x_0 = 1.$$

Le système (1) fournit donc

$$0 = \Sigma U x = \rho x_0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = 0.$$

On retombe sur un système analogue au système (1) du n° **4** et l'on a encore

$$M^2 - MK^0 + \Phi = 0,$$

Φ étant le déterminant des φ_{ij}, c'est-à-dire le jacobien des φ_i, et

$$K^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)'.$$

17. Lorsque $\lambda = 1$, les φ_{ij} sont des constantes ainsi que Φ et K^0; M est aussi une constante. Chacune des quatre relations du système (1) du n° **16** représente un plan. Or x est quelconque dans l'espace et chacune des quatre égalités devient une identité entre les x_i. Le calcul s'achève comme au Chapitre I et l'on trouve les mêmes conditions de régularité. C. Q. F. D.

18. Il est évident qu'une régulière $\mathcal{A}$ change :

Une capitale en une autre capitale;

Deux droites conjuguées en deux autres conjuguées aussi ;

Un tétraèdre normal (n° **15**) en un tétraèdre normal;

Un système formé par un plan et son centre en un système analogue, etc.

19. La régulière $\mathcal{A}$ effectuée sur les coordonnées-points x_i dans l'espace $\mathcal{E}$ se traduit sur les coordonnées-plans u_i par l'inverse $\mathcal{A}'^{-1}$ de la transposée (n° **2**). Mais, le point x étant le centre du plan u (n° **11**), on a

$$u_2 = x_2, \qquad u_2 = -x_1, \qquad u_3 = -x_4, \qquad u_4 = x_3,$$

c'est-à-dire $u_i = \varepsilon[x_i]$ (n^{os} **1** et **2**). Il faut donc avoir forcément

$$\mathcal{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1}\mathcal{A}\varepsilon,$$

comme nous le savions déjà (n° **8**).

20. Au point de vue géométrique, la multiplication de la régulière $\mathcal{A}$ par une singulière (n° **6**) quelconque est une opération indifférente. Je supposerai dorénavant toujours (comme aux n^{os} **6** et **7**) que les *sept* conditions de régularité sont

$$\left\{\begin{array}{lll} (12) = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \\ & (12) - (34) = 1 & \end{array}\right\} \text{(dont six distinctes seulement),}$$

et que l'invariant (xy) du Chapitre I est absolu.

Une singulière

$$|x_i \quad kx_i|$$

donne simplement $k^2 = 1$. Nous envisagerons donc une seule régulière singulière autre que l'unité, c'est

$$\mathcal{K} = |x_i \quad -x_i|.$$

Au point de vue géométrique, $\mathcal{K}$ se confond avec la substitution unité.

21. La construction des groupes réguliers d'ordre fini sera précédée par l'établissement de diverses propositions géométriques qui ont l'avantage d'abréger les discussions purement algébriques. Ces propositions sont, d'ailleurs, le développement des théories du présent Chapitre.

CHAPITRE III.

CHOIX DU TÉTRAÈDRE DE RÉFÉRENCE.

22. Soient P et P′ deux figures analogues de l'espace (deux plans, deux points, deux tétraèdres, etc.). S'il existe au moins une régulière $\mathcal{A}$ qui transforme P en P′, $\mathcal{A}^{-1}$, aussi régulière, transformera P′ en P. Nous dirons alors que les deux figures peuvent être *régulièrement amenées l'une sur l'autre*.

23. *Tout tétraèdre normal* (nº **15**) $\mathfrak{U}$ *peut être régulièrement amené sur le tétraèdre de référence* $\mathfrak{T}$.

Soient

$$P_i = \sum_j p_{ij} x_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre faces de $\mathfrak{U}$.

Nommons $P_1 = P_2 = 0$ et $P_3 = P_4 = 0$ les deux arêtes conjuguées; on aura, en posant

$$q_{ij} = \begin{vmatrix} p_{1i} & p_{1j} \\ p_{2i} & p_{2j} \end{vmatrix}, \qquad q'_{ij} = \begin{vmatrix} p_{3i} & p_{3j} \\ p_{4i} & p_{4j} \end{vmatrix},$$

les relations suivantes (nº **12**) :

$$(o) \qquad \frac{q'_{12}}{q_{34}} = \frac{q'_{34}}{q_{12}} = \frac{q'_{31}}{q_{31}} = \frac{q'_{24}}{q_{24}} = \frac{q'_{23}}{q_{23}} = \frac{q'_{14}}{q_{14}} = \rho.$$

La substitution quaternaire $\mathcal{A} = (a_{ij}) = (r_i p_{ij})$, où les r_i sont des constantes, change $\mathfrak{T}$ en $\mathfrak{U}$; $\mathcal{A}^{-1}$ change $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{T}$, et tout cela quels que soient les paramètres r. Exprimons que la quaternaire $\mathcal{A}$ est régulière. Il viendra

$$(ij) = r_1 r_2 q_{ij}, \qquad (ij)' = r_3 r_4 q'_{ij}.$$

Les conditions de régularité sont ainsi, sous le bénéfice des

relations (o),

$$\begin{aligned}
(12)' &= r_3 r_4 q'_{12} = (34) = r_1 r_2 q_{34} = r_3 r_4 \rho\, q_{34},\\
(34)' &= r_3 r_4 q'_{34} = (12) = r_1 r_2 q_{12} = r_3 r_4 \rho\, q_{12},\\
(23)' &= r_3 r_4 q'_{23} = (23) = r_1 r_2 q_{23} = r_3 r_4 \rho\, q_{23},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$o = q_{12}\delta = q_{34}\delta = q_{23}\delta = q_{14}\delta = q_{31}\delta = q_{24}\delta.$$
$$\delta = r_1 r_2 - \rho\, q_3 q_4.$$

La condition $\delta = o$ est suffisante; elle est aussi nécessaire, car un au moins des q n'est pas zéro. C. Q. F. D.

24. Un corollaire évident est celui-ci : *Les divers tétraèdres normaux de l'espace se permutent transitivement.* Un quelconque peut être régulièrement amené sur un quelconque. Si une régulière superpose à lui-même un tétraèdre normal et en permute les quatre sommets 1, 2, 3 et 4, les déplacements des quatre sommets ne sont pas quelconques. Si $\overline{12}$ et $\overline{34}$ sont les deux arêtes conjuguées, le groupe des déplacements ne contiendra aucune substitution ternaire et se réduira aux huit substitutions dérivées de

$$(12)\,(34),\quad (13)\,(24)\quad \text{et}\quad (12)\,(3)\,(4).$$

25. Théorème. — *Deux droites conjuguées quelconques d_{12} et d_{34} peuvent toujours être régulièrement amenées sur les arêtes g_{12} et g_{34} du tétraèdre de référence τ.*

Soient

N_1 et N_2 deux plans quelconques passant par d_{12},
N_3 et N_4 » » d_{34}.

$$\left|\begin{array}{lllll}
n_1 & \text{le point où} & N_2 & \text{coupe} & d_{34}\\
n_2 & \quad » & N_1 & » & d_{34}\\
n_3 & \quad » & N_4 & » & d_{12}\\
n_4 & \quad » & N_3 & » & d_{12}
\end{array}\right|.$$

N_1, N_2, N_3, N_4 auront respectivement n_2, n_1, n_4, n_3 pour centres (n° **15**) et le tétraèdre $\mathfrak{U}$ des quatre points n sera normal. $\mathfrak{U}$ pourra régulièrement être amené sur $\mathfrak{E}$. Alors d_{12} et d_{34} viennent régulièrement sur g_{12} et g_{34} ou sur g_{34} et g_{12}. Dans le dernier cas, on permutera régulièrement (n° **24**) g_{12} et g_{34}.

26. *Deux capitales quelconques d_{14} et d_{24} qui se coupent en un point n_3 peuvent toujours être amenées régulièrement sur les arêtes capitales g_{14} et g_{24}* (n° **15**) *du tétraèdre de référence qui se coupent au sommet τ_3.*

Soit N_4 le plan de d_{14} et d_{24}. N_4 aura n_3 pour centre. Menons par n_3 une droite quelconque d_{12} non capitale; la conjuguée d_{34} de d_{12} sera située dans le plan N_4. Le point n_4, quelconque sur d_{12}, aura son plan central N_3 passant par d_{34}. d_{34} rencontre d_{14} et d_{24} aux points n_2 et n_1 ayant respectivement N_1 et N_2 pour plans centraux. Le tétraèdre $\mathfrak{U}$ des quatre points n est normal et vient régulièrement sur $\mathfrak{E}$. Le raisonnement s'achève, à l'aide des n^{os} **25** et **24**, sans peine.

On peut dire aussi que *deux capitales données qui se coupent viennent régulièrement sur deux capitales données qui se coupent aussi.*

27. *Deux capitales quelconques d_{14} et d_{23} qui ne se rencontrent pas viennent régulièrement sur les arêtes g_{14} et g_{23} de $\mathfrak{E}$.*

Soit d_{12} une droite non capitale qui rencontre d_{14} en n_3 et d_{23} en n_4. La conjuguée d_{34} de d_{12} rencontre d_{14} en n_2 et d_{23} en n_1. Le tétraèdre des quatre points n sera normal. Le raisonnement s'achève comme au n° **26**.

28. La construction des groupes réguliers généraux fera l'objet d'un Travail ultérieur. Dans le présent Mémoire, on se bornera à traiter une classe, assez étendue d'ailleurs, de groupes réguliers : les groupes *décomposables*.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DÉCOMPOSABLES.

29. Soit S_n un groupe d'ordre fini, constitué par des n-aires (c'est-à-dire par des substitutions linéaires, à n variables homogènes).

Admettons que les variables, *convenablement choisies,* puissent être réparties en systèmes $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_l, \ldots$, ayant la propriété suivante : Chaque n-aire de S_n remplace les variables de s_k par des fonctions linéaires homogènes des variables de s_l. s_k et s_l doivent évidemment contenir le même nombre de variables. M. Jordan dit alors que le groupe S_n est *décomposable,* que chaque n-aire *fait succéder* un système s_l au système s_k.

Les déplacements des systèmes s forment un groupe, lequel ne peut être transitif qu'entre systèmes ayant un même nombre de termes.

30. Pour $n = 4$, on écrira S simplement pour S_4 et l'on ne pourra faire que les diverses hypothèses suivantes :

Deux systèmes :

Hypothèse $\{2, 2\}$: deux systèmes de deux lettres;
Hypothèse $\{3, 1\}$: trois lettres et une lettre.

Trois systèmes :

Hypothèse $\{1, 1, 2\}$: une lettre, une lettre, deux lettres.

Quatre systèmes :

Hypothèse $\{1, 1, 1, 1\}$: une lettre par système.

Je vais montrer que les cas $\{3, 1\}$ et $\{1, 1, 2\}$ rentrent dans le cas $\{2, 2\}$.

Je désignerai par la caractéristique z, conformément au n° **14**, les variables convenablement choisies sur lesquelles peuvent s'effectuer les diverses répartitions ci-dessus indiquées. On a

$$z_i = \Sigma c_{ij} x_j, \qquad c_{ij} = \text{const.};$$

or il n'est nullement évident que le tétraèdre des quatre plans $z_i = 0$ soit normal, comme est normal le tétraèdre des quatre plans $x_i = 0$.

31. Prenons le cas $\{3, 1\}$ et écrivons, par exemple, pour la régulière $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a'_{11} z_1 + a'_{12} z_2 + a'_{13} z_3 \\ z_2 & a'_{21} z_1 + a'_{22} z_2 + a'_{23} z_3 \\ z_3 & a'_{31} z_1 + a'_{32} z_2 + a'_{33} z_3 \\ z_4 & a'_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

$\mathcal{A}$ laisse fixes :

le plan P, $z_4 = 0$, et aussi (par régularité) le centre p de P;

le point q, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ (non situé sur P), et aussi (par régularité) le plan central Q de q.

Les droites d_{12}, qui joint p à q, et d_{34}, qui est l'intersection de P avec Q, sont conjuguées sans être capitales.

$\mathcal{A}$ laisse fixes les deux conjuguées d_{12} et d_{34}, que l'on peut amener régulièrement sur g_{12} et g_{34} (n° **25**). Alors $\mathcal{A}$, laissant fixes g_{12} et g_{34}, devient, rétablissant la caractéristique x,

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\ x_3 & a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ x_4 & a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{vmatrix}.$$

On retombe sur le cas $\{2, 2\}$.

32. Prenons le cas $\{1, 1, 2\}$. Supposons les trois systèmes comprenant respectivement z_3, z_4 et, enfin, z_1 et z_2.

Il viendra pour une régulière

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & a_{33} z_3 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{43}z_3 \end{vmatrix},$$

et l'on retombe encore sur le cas $\{2, 2\}$.

33. Les seules hypothèses à examiner pour les groupes décomposables sont donc

$$\{2, 2\} \quad \text{et} \quad \{1, 1, 1, 1\}.$$

Pour le cas $\{2, 2\}$, nous aurons les deux systèmes :

s_1 formé par les deux lettres z_1 et z_2,
s_2 » » z_3 et z_4.

Le groupe régulier G contiendra un sous-groupe $\mathfrak{A}$ formé par les ω régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & a_{33}z_3 + a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{43}z_3 + a_{44}z_4 \end{vmatrix},$$

qui laissent s_1 et s_2 immobiles. G s'obtiendra en combinant $\mathfrak{A}$ avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} z_1 & b_{13}z_3 + b_{14}z_4 \\ z_2 & b_{23}z_3 + b_{24}z_4 \\ z_3 & b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \\ z_4 & b_{41}z_1 + b_{42}z_2 \end{vmatrix},$$

qui échange s_1 et s_2. $\mathfrak{A}$ est permutable à $\mathfrak{B}$.

34. Pareillement, dans le cas $\{1, 1, 1, 1\}$, il y aura quatre systèmes

formés chacun d'une lettre z_1, z_2, z_3 ou z_4. Toutes les régulières de G ramènent sur lui-même le tétraèdre Z des quatre plans $z_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

G contiendra un sous-groupe $\mathfrak{A}$ formé par ω régulières canoniques

$$\mathcal{A} = | z_i \quad a_i z_i |.$$

$\mathcal{A}$ sera permutable à des régulières

$$\mathcal{B} = | z_i \quad b_i z_j |.$$

G contiendra $m\omega$ régulières, m étant un diviseur de 24 et l'ordre du groupe

$$| i \quad j |$$

de déplacements entre les quatre lettres z_i.

CHAPITRE V.

GROUPES DÉCOMPOSABLES (2, 2)⁴.

53. Construisons le groupe G des régulières g, obtenu (nº **35**) en combinant le sous-groupe $\mathfrak{A}$ des ω régulières $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a'_{11} z_1 + a'_{12} z_2 \\ z_2 & a'_{21} z_1 + a'_{22} z_2 \\ z_3 & a'_{33} z_3 + a'_{34} z_4 \\ z_4 & a'_{43} z_3 + a'_{44} z_4 \end{vmatrix}$$

avec la régulière

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} z_1 & b'_{13} z_3 + b'_{14} z_4 \\ z_2 & b'_{23} z_3 + b'_{24} z_4 \\ z_3 & b'_{31} z_1 + b'_{32} z_2 \\ z_4 & b'_{41} z_1 + b'_{42} z_2 \end{vmatrix},$$

à laquelle $\mathfrak{A}$ est permutable de façon que l'ordre de G soit 2ω.

Nommons d_{12} et d_{34} les droites $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 = z_4 = 0$ respectivement. $\mathcal{A}$ laisse d_{12} et d_{34} fixes ; $\mathcal{B}$ les permute.

Les diverses formes de G en variables ordinaires x_i, rapportées à un tétraèdre normal ϖ, dépendent de la situation que prennent d_{12} et d_{34} par rapport au complexe capital. Plusieurs suppositions sont à faire.

56. Admettons d'abord que d_{12} et d_{34} soient conjuguées par rapport au complexe capital ; d_{12} et d_{34} s'amènent alors régulièrement sur g_{12} et g_{34} et il vient immédiatement

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

avec, par régularité,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = 1.$$

Désignons par p, q, r, s les binaires

$$p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \text{de déterminant } 1,$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}, \qquad \text{de déterminant } -1.$$

On pourra, sans ambiguïté, désigner $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par les notations

$$\mathcal{A} = [p, q], \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{A}' = [p', q], \qquad \dots$$

Un calcul simple montre que

$$\mathcal{A}'\mathcal{A} = [p'p, q'q], \qquad \mathcal{B}^2 = [rs, sr], \qquad \mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} \\ r^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} s^{-1}q \\ r^{-1}p \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B} = [s^{-1}qs, r^{-1}pr].$$

Désignons par P et Q les groupes des p et q. On voit que P *et* Q *sont d'ordre fini;* P *contient* rs *et* Q *contient* sr; s *transforme* Q *en* P, $s^{-1}Qs = P$, *et* r *transforme* P *en* Q, $r^{-1}Pr = Q$.

G est ainsi construit, puisque les groupes binaires d'ordre fini sont connus.

57. Admettons maintenant que d_{12} et d_{34} soient capitales toutes deux. Comme elles ne se rencontrent pas, elles peuvent s'amener régulièrement sur g_{13} et g_{24} (n° **27**; le raisonnement du n° **27** s'applique à g_{13} et g_{24} aussi bien qu'à g_{23} et g_{14}), et l'on a immédiatement (eu égard au n° **55**)

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 & a_{22}x_2 + a_{24}x_4 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \\ x_4 & a_{42}x_2 + a_{44}x_4 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12}x_2 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ x_3 & b_{32}x_2 + b_{34}x_4 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{43}x_3 \end{vmatrix}.$$

Nommons p, q, r, s les binaires, à déterminant non nul,

$$p = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{32} & b_{34} \\ b_{12} & b_{14} \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{43} & b_{41} \end{pmatrix}.$$

On désignera sans ambiguïté $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par les notations

$$\mathcal{A} = [p, q], \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Nommons P et Q les groupes des p et des q. Par des formules identiques à celles du n° **56**, on verra que P *et* Q *sont d'ordre fini;* rs *est contenue dans* P *et* sr *dans* Q; s *transforme* Q *en* P *et* P *est transformé par* r *en* Q.

Seulement la régularité entraîne entre p et q, r et s des sujétions beaucoup plus étroites qu'il importe maintenant d'introduire.

58. Au Chapitre IX de mon Mémoire : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre*, inséré aux 63e et 64e Cahiers (première série) du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai fait une étude complète des relations mutuelles que la quadrique (vraie quadrique ou cône du second degré) possède avec le complexe capital. J'ai examiné notamment (*loc. cit.*, n° **101**) la quadrique qui admet ∞ génératrices rectilignes capitales. Une pareille quadrique contient alors deux capitales (*nodales* du n° **101** précité) qui ne se rencontrent pas, mais qui sont rencontrées par toutes les génératrices capitales.

Ces nodales, qu'on peut toujours amener régulièrement sur g_{13} et g_{24}, suffisent pour déterminer complètement la quadrique correspondante T.

Prenons, en effet, un point courant x sur T. Si t est le point courant sur la génératrice capitale D issue de x, on aura

$$0 = x_3 t_1 - x_1 t_3 = x_4 t_2 - x_2 t_4.$$

Les coordonnées homogènes de D sont les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & -x_2 \end{matrix} \right\|.$$

Exprimant que D est capitale, on a l'équation

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

de T.

59. Reprenons le groupe G du n° **57** et introduisons la quadrique T qui admet pour *nodales* les droites g_{13} (ou d_{12}) et g_{24} (ou d_{34}). L'équation de T sera

$$0 = x_1 x_2 - x_3 x_4$$

ou

$$(1)\qquad \lambda = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_4} = \mu.$$

Il est évident, en vertu de ce qui précède (n° **58**), que *la quadrique* T *est invariante vis-à-vis de toutes les régulières* $\mathcal{E}$ *de* G, puisque $\mathcal{A}$ laisse fixes les deux nodales, que $\mathcal{B}$ permute simplement.

Les binaires p, q, r, s ayant la même signification qu'au n° **57**, désignons par $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$ les substitutions linéaires fractionnaires à une seule variable t,

$$\bar{p} = \left| t \quad \frac{a_{33}t + a_{31}}{a_{13}t + a_{11}} \right|, \qquad \bar{q} = \left| t \quad \frac{a_{22}t + a_{24}}{a_{42}t + a_{44}} \right|,$$

$$\bar{r} = \left| t \quad \frac{b_{32}t + b_{34}}{b_{12}t + b_{14}} \right|, \qquad \bar{s} = \left| t \quad \frac{b_{23}t + b_{21}}{b_{43}t + b_{41}} \right|.$$

Opérons sur la quadrique T par les régulières $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. La relation ci-dessus

$$(1)\qquad \lambda = \mu$$

devient

$$(2)\qquad \bar{p}[\lambda] = \bar{q}[\mu] \qquad \text{ou} \qquad \mu = (\bar{q})^{-1}\bar{p}[\lambda],$$

$$(3)\qquad \bar{r}[\mu] = \bar{s}[\lambda] \qquad \text{ou} \qquad \mu = (\bar{r})^{-1}\bar{s}[\lambda].$$

Comme T est invariante par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, (2) et (3) sont des conséquences de (1), quel que soit λ. On conclut immédiatement de là que

$$\bar{p} = \bar{q} \qquad \text{et} \qquad \bar{r} = \bar{s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{24}}{a_{31}} = \frac{a_{42}}{a_{13}} = \frac{a_{44}}{a_{11}} = \rho,$$

$$\frac{b_{23}}{b_{32}} = \frac{b_{21}}{b_{34}} = \frac{b_{43}}{b_{12}} = \frac{b_{41}}{b_{14}} = \sigma.$$

40. On voit immédiatement que

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & \rho a_{33} & 0 & \rho a_{31} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & \rho a_{13} & 0 & \rho a_{11} \end{Vmatrix} = \mathcal{A},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ \sigma b_{34} & 0 & \sigma b_{32} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} \\ \sigma b_{14} & 0 & \sigma b_{12} & 0 \end{Vmatrix} = \mathcal{B}.$$

On vérifie de suite que les conditions de régularité sont satisfaites dès qu'on a posé

$$1 = (12) - (34) = \rho\varpi = \sigma\chi,$$

$$\varpi = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \text{le déterminant de la binaire } p,$$

$$\chi = b_{32}b_{14} - b_{12}b_{34} = \text{le déterminant de la binaire } r.$$

41. Combinant l'analyse précédente avec le n° **37**, on peut énoncer les résultats suivants :

La binaire p est d'ordre fini; son déterminant ϖ est racine de l'unité; il en est de même pour $\rho = \varpi^{-1}$. Comme

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B}^2 = [rs, sr],$$

le déterminant $\sigma^2\chi^2$ de sr, ou de rs, doit être racine de l'unité; cela est, car $\sigma\chi = 1$ (n° **40**).

Ainsi, ces conditions suffisent pour que l'ordre de G soit fini.

42. Admettons qu'une au moins des deux droites non concourantes d_{12} et d_{34}, par exemple d_{12}, *ne soit pas* capitale. On amènera

alors régulièrement d_{12} sur g_{12}. La régulière $\mathcal{L}$ de G, qui laisse d_{12} fixe, laissera fixe aussi la conjuguée g_{34} de g_{12} (ou de d_{12}) et il viendra, comme au n° **56**,

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Si d_{34} est capitale, aucune régulière $\mathcal{L}$ de G ne peut amener d_{34} sur $d_{12} (= g_{12})$. La régulière $\mathcal{B}$ manque et G se réduit au groupe $\mathfrak{A}$ des $\mathcal{A}$. On est ramené au cas du n° **56**, sauf l'absence de $\mathcal{B}$.

Je supposerai donc d_{34} *non capitale* et, pour n'être pas ramené au cas du n° **56**, distincte de la conjuguée g_{34} de $d_{12} (= g_{12})$.

43. Considérons les capitales qui rencontrent à la fois d_{12} et d_{34}: elles rencontrent aussi la conjuguée d'_{12} de d_{12}. Les trois directrices d_{12}, d_{34}, d'_{12} définissent une quadrique T à ∞ génératrices capitales. T est invariante par toute régulière de G. Si T n'est pas un couple de plans, tous les raisonnements du n° **58** (empruntés à mon Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique*) subsistent. T comporte deux *nodales* rectilignes, *capitales* et *non concourantes*.

Toute régulière de G laisse fixe le couple formé par les deux nodales. On est ramené au cas du n° **57** et l'on ne trouve aucun groupe nouveau.

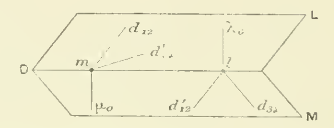
44. Examinons maintenant le cas réservé où T est un couple de deux plans L et M, de centres l et m. Sur les deux plans doivent être situées les quatre droites d_{12}, d_{34} et leurs conjuguées d'_{12} et d'_{34}. d_{12} et d_{34} ne se rencontrent pas; il en est de même pour d_{12} et d'_{12}, d_{34} et d'_{34}. En effet, la régulière $\mathcal{B}$ ne manque pas dans G (n° **42**), d_{12} et d_{34} ne sont capitales ni l'une ni l'autre.

Donc le plan L contient d_{12} et d'_{34}; le plan M contient d_{34} et d'_{12}. Les ∞ génératrices capitales de T sont les ∞ capitales λ de L qui rayonnent autour du centre l de L, et aussi (la régulière $\mathcal{B}$ permu-

tant L et M qui doivent jouer un rôle analogue) les ∞ capitales μ de M, qui rayonnent autour de m.

L'arête D *du dièdre* LM *est capitale*, car elle reste fixe pour toute régulière de G. Or, si D n'était pas capitale, le groupe G aurait deux droites conjuguées invariantes, savoir D et sa conjuguée D'. On serait ramené au groupe du nº **36**.

La génératrice λ de T doit rencontrer d_{34} et d'_{12}; D joint les deux centres l et m; donc d_{34} et d'_{12} concourent avec λ au point l de D. Pareillement, d_{12} et d'_{34} passent par le centre m de M. On a la figure suivante :



45. Prenons les coordonnées régulières x_i comme suit :

L, $x_1 = 0$;	M, $x_3 = 0$,
l, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$;	m, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,
d_{12}, $x_1 = x_2 = 0$;	d'_{12}, $x_3 = x_4 = 0$.

La régulière $\mathcal{A}$ de G laisse fixes L, M, l, m, d_{12} et d'_{12}; il vient

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

avec

$$1 = a_{11}a_{22} = a_{33}a_{44},$$

par régularité.

Dans le plan L, les droites issues du point m sont transformées par $\mathcal{A}$ suivant la binaire canonique

$$\left| \, x_2 \quad x_3 \quad a_{22}x_2 \quad a_{33}x_3 \, \right|.$$

Cette binaire laisse fixes les *trois* droites distinctes d_{12}, d'_{34} et D issues de m; la binaire est donc singulière et $a_{22}=a_{33}$; d'où aussi $a_{11}=a_{44}$.

Enfin, $\mathcal{A}$ transforme les capitales λ de L suivant la binaire

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x_3 & a_{33}x_3 \\ x_4 & a_{43}x_3+a_{44}x_4 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

et les capitales μ de M suivant la binaire

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 \\ x_2 & a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Je dis que le groupe $\mathfrak{L}$ des binaires (1), qui est évidemment d'ordre fini, laisse fixe une capitale λ_0. De même, le groupe M des binaires (2) laisse fixe une capitale μ_0.

Nous allons donc étudier les groupes binaires d'ordre fini

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

ou encore les groupes linéaires fractionnaires à une variable t des substitutions

$$s=|t \quad at+b|.$$

Tout sera démontré si j'établis que la racine t_0 de l'équation

$$at+b=t, \qquad b(1-a)^{-1}=t_0$$

est la même pour toutes les s du groupe.

46. s sera désignée sans ambiguïté par la notation

$$s=(a, b) \quad \text{ou} \quad [a, b].$$

Un calcul simple montre que, pour un entier l quelconque,

$$s^l=(a, b)^l=\left[a^l, \frac{b(a^l-1)}{a-1}\right] \qquad \text{pour} \qquad a\neq 1,$$

$$s^l=(1, b)^l=(1, lb).$$

Mais s est d'ordre fini; $b = 0$ dès que $a = 1$ et alors $s = 1$: bref

$$(1, \ldots) = 1.$$

Soient maintenant deux substitutions quelconques du groupe

$$s = (a, b), \qquad s' = (a', b').$$

Il viendra

$$s's = (aa', a'b + b') \qquad ss' = (aa', ab' + b),$$
$$(s's)^{-1} ss' = (1, \ldots) = 1, \qquad ss' = s's,$$
$$ab' + b = a'b + b',$$
$$\frac{b'}{a' - 1} = \frac{b}{a - 1}.$$

C. Q. F. D.

47. Toute régulière $\mathfrak{A}$ laisse fixe chacune des deux *capitales non concourantes* λ_0 et μ_0 dont on vient de prouver l'existence.

La régulière $\mathfrak{B}$ est permutable au groupe $\mathfrak{A}$ des $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ permute, par conséquent, λ_0 et μ_0.

G admet pour invariant le couple λ_0 et μ_0. λ_0 et μ_0 se comportent comme les deux nodales au nº **45**. Les conclusions du nº **45** subsistent même quand la quadrique T dégénère en un couple de plans. Nous n'obtenons aucun groupe nouveau.

J'ai ainsi fini avec l'hypothèse $\{2, 2\}$, car j'ai examiné toutes les situations possibles, par rapport au complexe capital, des droites d_{12} et d_{34}, savoir :

d_{12} et d_{34} conjuguées (nº **36**);

d_{12} et d_{34} toutes deux capitales (nºs **37** à **41**);

Une droite capitale, l'autre non (nº **42**);

Aucune ni capitale, ni conjuguée de l'autre (nºs **42** à **47**).

On remarquera que G possède toujours une quadrique invariante, sauf dans le cas où d_{12} et d_{34} sont conjuguées.

CHAPITRE VI.

GROUPES DÉCOMPOSABLES {1, 1, 1, 1}.

48. Avant de construire les groupes réguliers d'ordre fini G qui sont fournis par l'hypothèse {1, 1, 1, 1} du Chapitre IV (nos **33** et **34**), il importe de donner quelques explications sur les régulières canoniques.

Soit s une n — aire d'ordre fini ; elle aura pour forme canonique

$$s_0 = | z_j \quad k_j z_j | \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

les k étant des racines de l'unité. Si une seconde n — aire t est telle que

$$t^{-1} s t = s_0,$$

je dirai que *t est une* canonisante *de s*.

49. Théorème. — *Toute régulière d'ordre fini s peut être* régulièrement *mise sous forme canonique*, c'est-à-dire admet au moins une canonisante régulière.

s, mise régulièrement ou non sous forme canonique, est

$$s = | z_j \quad k_j z_j | \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

s laisse fixes les quatre faces $z_j = 0$ du tétraèdre Z, normal (n° **15**) ou non, et aussi les six arêtes de Z. Parmi les trois arêtes issues d'un sommet de Z, une au moins n'est pas capitale, puisque ces trois arêtes ne sont point dans un même plan. Z a une arête au moins (par exemple $z_1 = z_2 = 0$, qu'on peut régulièrement amener sur l'arête $x_1 = x_2 = 0$ ou g_{12} du tétraèdre normal de référence) non capitale. Ainsi s laisse fixes g_{12} et sa conjuguée g_{34}, et l'on a, en variables régulières x_j,

$$s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \qquad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = b_{33} b_{44} - b_{34} b_{43} = 1).$$

Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}$$

les canonisantes, de déterminant un, pour les binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

respectivement. Ces binaires sont d'ordre fini et admettent sûrement des canonisantes.

La quaternaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{vmatrix}$$

sera tout à la fois régulière et canonisante pour s. C. Q. F. D.

30. Soit donc la régulière canonique

$$\mathfrak{L} = |x_j \quad a_j x_j| \qquad (j = 1, 2, 3, 4):$$

la régularité exige encore

$$1 = a_1 a_2 = a_3 a_4,$$

et cela suffit. On écrira donc sans ambiguïté

$$\mathfrak{L} = [a_1, a_1^{-1}, a_3, a_3^{-1}];$$

a_1 et a_3 sont des racines de l'unité.

Si le déterminant d'une quaternaire est égal à un, les quatre *coefficients a* sont évidemment les racines de l'équation caractéristique ω.

31. Examinons un cas très particulier, utile pour la suite (n° **37**). C'est celui où les quatre racines de ω sont $1, 1, \theta, \theta^2$, avec $\theta =$ racine cubique de l'unité.

Soient u_1 et u_2 les deux expressions u_j $\left(u_j = \sum_k b_{jk} x_k\right.$, déterminant

des constantes b_{jk} non nul) que la régulière $\mathfrak{L}$ multiplie par un et soient u_3 et u_4 les deux u que $\mathfrak{L}$ multiplie par θ^2 et θ. On vérifie de suite que tout tétraèdre U dont $\mathfrak{L}$ laisse fixes les quatre faces est construit comme suit : les quatre faces de U sont $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ et deux plans quelconques passant par la droite $u_1 = u_2 = 0$.

Prenons maintenant $\mathfrak{L}$ sous sa forme régulière canonique, en variables x_j,

$$\mathfrak{L} = [\theta^\rho, \theta^{-\rho}, \theta^\sigma, \theta^{-\sigma}].$$

Parmi les quatre coefficients deux sont égaux à l'unité ; on ne peut avoir $\sigma \equiv \rho \pmod 3$, car alors

$$\mathfrak{L} = [\theta^\rho, \theta^{-\rho}, \theta^\rho, \theta^{-\rho}]$$

il n'y aurait plus que deux coefficients distincts. De même on ne peut faire $\sigma + \rho \equiv 0 \pmod 3$. Donc $\theta^\rho = \theta^{-\rho}$, $2\rho \equiv 0$, $\rho \equiv 0$ et

$$\mathfrak{L} = [1, 1, \theta, \theta^2] = |x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_1 \quad x_2 \quad \theta x_3 \quad \theta^2 x_4|.$$

Les seuls plans que $\mathfrak{L}$ laisse fixes sont $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ et un plan *quelconque* passant par $x_1 = x_2 = 0$.

Il est donc légitime de poser

$$u_1 = 3x_1, \qquad u_2 = x_2, \qquad u_3 = 3\tau x_3, \qquad u_4 = 3\tau x_4,$$

puisque les u ne sont déterminés qu'à un facteur numérique près chacun.

Ce résultat est essentiel pour la suite (n° **57**).

52. On est maintenant à même d'aborder la construction du groupe G défini au n° **54**. G contiendra les ω régulières

$$\mathcal{A} = |z_j \quad a_j z_j|$$

d'un sous-groupe $\mathfrak{A}$ et ensuite diverses régulières

$$\mathcal{B} = |z_j \quad b_j z_k|.$$

Il y aura, dans G, $m\omega$ régulières, m étant un diviseur de **24**.

G est isomorphe au groupe G′ des déplacements entre les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, du tétraèdre Z, des quatre plans $z_j = 0$. A la substitution unité de G′ correspond dans G le sous-groupe $\mathfrak{A}$.

33. J'écarterai, bien entendu, tous les groupes fournis par l'hypothèse $\{2, 2\}$ et déjà construits, notamment les groupes *qui laissent fixe un couple de deux droites non concourantes* $u_1 = u_2 = 0$ et $u_3 = u_4 = 0$, $u_j = \sum_k c_{jk} z_k$. Raisonnant sur les u comme aux nos **32** et **33** sur les z, on voit de suite qu'on retombe sur l'hypothèse $\{2, 2\}$.

34. Reprenons le tétraèdre Z des quatre sommets 1, 2, 3, 4 et des six arêtes 12, 34, ... Répartissons les arêtes opposées deux à deux en trois couples

$$A = \{23, 14\}, \qquad B = \{31, 24\}, \qquad C = \{12, 34\}.$$

Les groupes G et G′ sont isomorphes aux groupes G″ des déplacements entre A, B, C; G″ *est transitif;* sinon le couple C, par exemple, resterait fixe pour toutes les substitutions de G. Cela est absurde (no **33**).

G″ contient la substitution (ABC) et il y a dans G au moins une régulière $\mathfrak{L}$ qui permute circulairement les trois couples. Les trois couples ont donc vis-à-vis du complexe capital une structure analogue. Nommons $\mathfrak{L}' = (4)(123)$ une des substitutions du groupe G′, entre les quatre sommets 1, 2, 3 et 4, qui correspondent à la régulière $\mathfrak{L}$ de G.

Les deux arêtes d'un même couple ne sont pas conjuguées par rapport au complexe capital. Si, en effet, 12 et 34 sont conjuguées, Z devient un tétraèdre normal, les quatre arêtes 13, 24, 23, 14 deviennent capitales et ne sont plus conjuguées ensemble. Cela est absurde, car la régulière $\mathfrak{L}$ permute les trois couples.

Aucune arête de Z n'est capitale. Si 12, par exemple, était capitale, il en serait de même pour 23 et 31 que $\mathfrak{L}$ amène successivement sur 12. Les trois arêtes 12, 23, 31 capitales et situées dans un même plan, celui des trois sommets 1, 2, 3, seraient concourantes, ce qui est absurde.

55. Théorème. — *Le sous-groupe $\mathfrak{A}$ du n° 52 se réduit aux deux régulières singulières.*

Prenons, dans G, la régulière $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{A}$. $\mathcal{A}$ laisse les quatre sommets fixes et a pour correspondante, dans G′, la substitution unité.

Amenons régulièrement, sur $x_4 = 0$, le plan des trois sommets $\overline{123}$; en $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, le quatrième sommet 4 de Z. On verra facilement, par les théories géométriques du Chapitre III, que cela est toujours possible.

$\mathcal{A}$ laissant fixes $\overline{123}$ et 4 s'écrira

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \quad [\text{en variables } x].$$

Le centre 4′ du plan $\overline{123}$ n'est sur aucune des arêtes 12, 23, 31, sans quoi l'arête serait capitale. La substitution *ternaire*

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

laisserait donc fixes, sur le plan $\overline{123}$, les quatre sommets d'un quadrilatère 1234′; α serait une ternaire *singulière* et il viendrait

$$\mathcal{A} = | \; x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \qquad a x_1 \quad a x_2 \quad a x_3 \quad a' x_4 \; |;$$

par régularité,

$$a^2 = aa' = 1, \qquad a = a';$$

$\mathcal{A}$ est singulière. C. Q. F. D.

56. Le groupe général Γ entre quatre lettres peut être considéré comme provenant des substitutions

$$\delta' = (4)(123), \qquad \alpha' = (12)(34), \qquad \varepsilon' = (1)(4)(23).$$

Si ε' manque, on retombe sur le groupe alterné.

On a vu (nº 54) que δ' ne peut manquer dans le groupe G'. Soit

$$\delta = | z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \qquad az_2 \quad bz_3 \quad cz_4 \quad dz_1 |$$

une correspondante à δ' dans G.

Le déterminant de δ est *un* et il vient

$$abcd = 1.$$

δ^3 est singulière (nº 55) et

$$abc = d^3 \qquad \text{d'où} \qquad d^4 = 1.$$

Transformons δ par la substitution

$$\Lambda = | z_j \quad \lambda_j z_j |,$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} z_1 & \lambda_1^{-1} a \lambda_2 z_2 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} b \lambda_3 z_3 \\ z_3 & \lambda_3^{-1} c \lambda_1 z_1 \\ z_4 & \lambda_4^{-1} d \lambda_4 z_4 \end{vmatrix}$$

et l'on peut déterminer les λ de façon à avoir

$$d = a\lambda_2\lambda_1^{-1} = b\lambda_3\lambda_2^{-1} = c\lambda_1\lambda_3^{-1}.$$

Bref, je prendrai

$$\delta = \begin{vmatrix} z_1 & dz_2 \\ z_2 & dz_3 \\ z_3 & dz_1 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l}(d^4 = 1 \text{ ou } d = 1, \text{ à une} \\ \quad \text{substitution singulière près}).\end{array}$$

57. L'équation caractéristique a pour racines $1, 1, \theta, \theta^2, \theta =$ racine cubique de l'unité.

δ multiplie

par 1 : $u_1 = z_1 + z_2 + z_3$ et $u_2 = z_4$;

par θ : $u_3 = z_1 + \theta^2 z_2 + \theta\, z_3$;

par θ^2 : $u_4 = z_1 + \theta\, z_2 + \theta^2 z_3$.

Raisonnant comme au n° **51**, on posera

$$(\text{o})\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 3x_1 \\ z_1 + \theta\, z_2 + \theta^2 z_3 &= 3\tau x_3 \\ z_1 + \theta^2 z_2 + \theta\, z_3 &= 3\tau x_4 \\ z_4 &= x_2 \end{aligned}\right\},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= x_1 + \tau\, x_3 + \tau\, x_4 \\ z_2 &= x_1 + \tau\theta^2 x_3 + \tau\theta\, x_4 \\ z_3 &= x_1 + \tau\theta\, x_3 + \tau\theta^2 x_4 \\ z_4 &= x_2 \end{aligned}\right\},\qquad \text{d'où}\qquad z = \mathfrak{M}[x],$$

$\mathfrak{M}$ étant la quaternaire *irrégulière*

$$\mathfrak{M} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau\theta^2 & \tau\theta \\ 1 & 0 & \tau\theta & \tau\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\},\qquad \text{de déterminant} = 3\tau^2(\theta - \theta^2).$$

Nommons G_x et G_z les deux expressions du groupe G en variables x et en variables z. On a évidemment

$$G_x = \mathfrak{M}^{-1} G_z \mathfrak{M}.$$

En variables z, l'équation du complexe capital est $\mathfrak{C} = 0$. Si je construis G_z de façon à avoir $\mathfrak{C}$ pour invariant absolu, G_x sera régulier et sera le groupe G cherché.

58. Nommons respectivement (jk) et $(jk)'$ la coordonnée-points courante d'une droite, respectivement en coordonnées x et en coordonnées z. Posons, pour abréger,

$$(23)' = g_1, \quad (31)' = g_2, \quad (12)' = g_3,$$
$$(14)' = h_1, \quad (24)' = h_2, \quad (34)' = h_3.$$

Les déplacements d'indices marqués par les substitutions de G'

$$\alpha' = (12)(34), \quad \delta' = (4)(123), \quad \varepsilon' = (1)(4)(23)$$

transforment les g et les h de la façon marquée par les symboles de substitutions

$$(o) \quad \begin{cases} \alpha'' = (g_1 h_1)(g_2, -h_2)(g_3, -g_3)(h_3, -h_3), \\ \delta'' = (g_1 g_2 g_3)(h_1 h_2 h_3) \\ \varepsilon'' = (g_1, -g_1)(g_2, -g_3)(h_1)(h_2 h_3). \end{cases}$$

Enfin, on vérifie sans peine que [sous le bénéfice des formules (o) du n° **57**]

$$3.(12) = h_1 + h_2 + h_3,$$
$$9\tau^2.(34) = (\theta^2 - \theta)(g_1 + g_2 + g_3),$$
$$9\tau^2[(12) - (34)] = 3\tau^2(h_1 + h_2 + h_3) + (\theta - \theta^2)(g_1 + g_2 + g_3).$$

Déterminons le paramètre τ par la condition $3\tau^2 + \theta^2 - \theta = 0$; on pourra prendre pour équation du complexe capital en variables z, simplement

$$\Phi = g_1 + g_2 + g_3 + h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Φ est, bien entendu, pour la substitution δ construite au n° **56**, un invariant absolu, sous le bénéfice des formules (o) ci-dessus. Cela donnerait encore (n° **56**, *in fine*), $d^2 = 1$ et $d = 1$.

59. Prenons maintenant, dans le groupe G', la substitution (n° **56**)

$$\alpha' = (12)(34)$$

et, dans G, une correspondante

$$\alpha = | z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \qquad az_2 \quad bz_1 \quad cz_4 \quad dz_3 |.$$

α change $\mathfrak{P}$, sous le bénéfice des formules (o) du n° **58**, en

$$bch_1 - cah_2 - abg_3 + adg_1 - bdg_2 - cdh_3.$$

$\mathfrak{P}$ est invariant absolu et

$$1 = bc = -ac = -ab = ad = -bd = -cd,$$

c'est-à-dire $a = d$, $b = c = -d$, $d^2 = 1$, ou simplement

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}.$$

On voit que le déterminant de α est un et que α^2 est singulière, comme cela devait être.

60. Passons enfin aux substitutions $\varepsilon' = (1)(4)(23)$ de G' et

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & az_1 \\ z_2 & bz_3 \\ z_3 & cz_2 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \text{ du groupe G.}$$

ε transforme, en vertu des formules (o) du n° **58**, $\mathfrak{P}$ en

$$-bcg_1 - cag_3 - abg_2 + h_1 ad + h_2 cd + h_3 bd.$$

$\mathfrak{P}$ est invariant absolu et

$$1 = -bc = -ca = -ab = ad = cd = bd.$$

De là, tout calcul fait,

$$a = b = c = i, \qquad d = -i,$$

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}, \qquad i^2 + 1 = 0.$$

ε a son déterminant égal à un; ε^2 est singulière. C'était prévu.

61. En résumé, le seul groupe nouveau que nous ayons à ajouter à ceux du Chapitre précédent est celui qu'on obtient en transformant par l'*irrégulière*

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau\theta^2 & \tau\theta \\ 1 & 0 & \tau\theta & \tau\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [\text{de déterminant } 3\tau^2(\theta - \theta^2) = (\theta - \theta^2)^2 = -3],$$

le groupe *irrégulier* dérivé des trois quaternaires

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}.$$

L'ordre est 48, puisqu'il y a deux régulières singulières.

Sur la transformation ordinaire des fonctions abéliennes;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

---

1. La théorie de la transformation des fonctions abéliennes ordinaires peut recevoir, sur la surface de Kummer, une interprétation géométrique très simple qui conduit à d'intéressantes propriétés de cette surface; inversement, l'interprétation géométrique peut venir en aide à l'Analyse pour la recherche des trois équations, dites *modulaires,* qui lient les modules des fonctions abéliennes primitives et transformées; nous insisterons spécialement, à ce point de vue, sur la transformation du second ordre.

Propriétés préliminaires.

2. Soit une surface de Kummer représentée paramétriquement par le procédé de M. Weber (*Crelle,* Tome 84) : les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales des variables u et v, du second ordre et à caractéristique nulle; ces fonctions étant paires, à un point de la surface répondent (aux périodes près) deux couples d'arguments, u, v et $-u$, $-v$. Les seize points doubles ont pour arguments les seize demi-périodes, en y comprenant la demi-période $0, 0$.

3. Considérons maintenant, sur la surface de Kummer, une courbe C que nous supposerons d'abord ne passer *par aucun des seize points*

doubles, et cherchons, *le long de cette courbe*, l'expression des différentielles du et dv. En admettant que les coordonnées d'un point de C soient exprimées en fonction fuchsienne d'un paramètre, ξ, on aura, pour du et dv, des expressions de la forme $\sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$, $\Theta(\xi)$ étant une fonction uniforme de ξ; cela résulte de ce que, en chaque point de la courbe, du et dv doivent avoir chacun deux valeurs égales et de signes contraires. De plus, $\Theta(\xi)$ doit être une fonction thêtafuchsienne du second ordre. Soit en effet $\left(\xi, \frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right)$ une des substitutions fondamentales du groupe fuchsien lié à C; il faut que du et dv se reproduisent, du moins au signe près, quand on opère sur ξ cette substitution, car celle-ci n'altère pas le point considéré sur la courbe. En d'autres termes, en supposant $ad - bc = 1$, le radical $\sqrt{\Theta(\xi)}$ doit se reproduire multiplié par $\pm(c\xi + d)^2$, c'est-à-dire que

$$\Theta\left(\frac{a\xi+b}{c\xi+d}\right) = (c\xi+d)^4\,\Theta(\xi),$$

ce qui établit bien que $\Theta(\xi)$ est une fonction thêtafuchsienne d'ordre deux.

Étudions maintenant les pôles et les zéros de cette fonction; ou mieux, pour plus de généralité, de la fonction $\Theta(\xi)$ définie le long de C par

$$(1) \qquad du + \rho\,dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi,$$

où ρ est une constante quelconque : cette nouvelle fonction, d'après le raisonnement précédent, est encore thêtafuchsienne et du second ordre.

Elle ne peut avoir de pôle d'ordre supérieur à l'unité, car ce pôle serait au moins d'ordre deux, et l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\,d\xi$ y deviendrait infinie, ce qui est impossible, puisque $u + \rho v$ demeure fini, comme u et v, sur toute la surface de Kummer, et *a fortiori* sur la courbe C.

Je dis que $\Theta(\xi)$ ne peut pas non plus admettre de pôle d'ordre un, $\xi = \xi_0$. On aurait en effet, dans le domaine du point ξ_0,

$$du + \rho\,dv = \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \xi_0}}\left[a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + \ldots\right]$$

et

$$(2) \qquad u + \rho v = \sqrt{\xi - \xi_0}\, F(\xi - \xi_0) + c_0,$$

c_0 désignant une constante, et $F(\xi - \xi_0)$ une fonction holomorphe de ξ au voisinage de ξ_0. Faisons maintenant décrire à ξ un contour fermé autour du point ξ_0; $u + \rho v$ prend la nouvelle valeur

$$(3) \qquad -\sqrt{\xi - \xi_0}\, F(\xi - \xi_0) + c_0,$$

différente de la précédente. Comme $u + \rho v$ ne peut admettre, en un même point de la surface de Kummer, que deux valeurs égales et de signes contraires, aux périodes près, la *somme* ou la *différence* des valeurs (2) et (3) doit être une période de $u + \rho v$: la différence, qui dépend de ξ, ne peut satisfaire à cette condition; il faut donc que ce soit la somme, qui est $2c_0$. Si donc on désigne par $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') un système de périodes normales de u et v, et par m, n, p, q des entiers, on aura

$$2c_0 = m + n\rho + p(g + \rho h) + q(h + \rho g').$$

D'ailleurs, pour $\xi = \xi_0$, $u + \rho v$ se réduit à c_0. Il en résulte aisément, puisque ρ est quelconque, que, *pour* $\xi = \xi_0$, u et v ont les valeurs

$$u = \tfrac{1}{2}(m + pg + qh), \qquad v = \tfrac{1}{2}(n + ph + qg').$$

Ces deux valeurs constituent une *demi-période* de u, v; le point correspondant sur la surface de Kummer est donc un des seize points doubles de la surface, conclusion contraire à l'hypothèse initiale que la courbe C ne passe par aucun de ces points.

Ainsi, la fonction $\Theta(\xi)$ ne peut admettre de pôle; un raisonnement tout pareil établit que $\Theta(\xi)$ ne peut avoir de zéro d'ordre impair. Voici donc le résultat :

4. *Soit, sur la surface de Kummer, une courbe,* C, *ne passant par aucun des seize points doubles; imaginons que les coordonnées d'un point de* C *soient exprimées en fonction fuchsienne d'un para-*

mètre ξ. En désignant par du et dv les différentielles abéliennes qui répondent à la surface; par ρ une constante quelconque, on a, en tout point de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ *étant une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre deux, dont tous les zéros sont d'ordre pair de multiplicité.*

5. Sous une autre forme, en représentant par $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane d'ordre n, répondant point par point à C, on aura, le long de la courbe $f = 0$,

$$du + \rho\, dv = \sqrt{F_{2n-6}(x, y)}\, \frac{dx}{f'_y},$$

$F_{2n-6}(x.y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une courbe de degré $2n - 6$, biadjointe à $f(x, y) = 0$. Par *biadjointe*, on entend une courbe qui présente, en chaque point multiple de la proposée, la même singularité que la figure formée par l'ensemble de deux adjointes ordinaires. De plus, la courbe $F_{2n-6} = 0$ a un contact d'ordre impair avec la courbe $f = 0$ en tous les points, non multiples, où elle la coupe.

6. *Remarque.* — Il peut arriver que $\Theta(\xi)$ soit le carré d'une fonction thêtafuchsienne holomorphe d'ordre un; ou, si l'on veut, que F_{2n-6} soit le carré d'un polynome de degré $n - 3$ en x et y, qui égalé à zéro représente une courbe adjointe à $f = 0$.

Dans ce cas, *du* et *dv* sont des différentielles *abéliennes de première espèce* le long de la courbe C : celle-ci est alors ce que j'ai appelé une *courbe univoque* (*Journal de Math.*, 4[e] série, t. IX), c'est-à-dire que son équation sur la surface de Kummer s'obtient en annulant une fonction thêta des variables u et v, qui n'est ni paire ni impaire.

7. Supposons maintenant que la courbe C passe par un ou plusieurs points doubles de la surface de Kummer; on aura toujours (n° 5) le

long de cette courbe

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction thêtafuchsienne du second ordre de ξ. Cette fonction, d'après le n° 5, ne peut admettre comme pôles (nécessairement d'ordre un) ou comme zéros d'ordre impair, que les valeurs de ξ qui répondent aux points de C coïncidant avec un point double de la surface. Pour éclaircir cette question, supposons que, pour $\xi = \xi_0$, la courbe C passe par le point double qui a pour arguments abéliens $u = 0$, $v = 0$ sur la surface (le raisonnement serait le même pour un autre point double) et prenons ce point pour origine, $x = y = z = 0$, des coordonnées. On aura, *sur la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$x = \alpha(\xi - \xi_0)^p + \beta(\xi - \xi_0)^{p+1} + \ldots$$

et des expressions analogues pour y et z : dans ces équations, p désigne un entier positif, au moins égal à 1; si $p = 1$, la branche de courbe qui répond aux valeurs voisines de ξ_0 est *simple*; si $p > 1$, la courbe présente, pour ces valeurs, un *cycle* singulier, d'ordre p.

Observons maintenant que, *sur la surface de Kummer*, en vertu même du mode de représentation de M. Weber, les coordonnées x, y et z sont des fonctions paires des paramètres u et v; au voisinage de $u = 0$, $v = 0$; on a donc, sur la surface,

$$x = A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots$$

et de même pour y et z. On en conclut, *le long de la courbe* C, au voisinage de ξ_0,

$$A u^2 + B uv + C v^2 + \ldots = \alpha(\xi - \xi_0)^p + \beta(\xi - \xi_0)^{p+1} + \ldots$$

et deux autres équations semblables; d'où

$$u^2 = \lambda(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad uv = \mu(\xi - \xi_0)^p + \ldots, \qquad v^2 = \nu(\xi - \xi_0)^p + \ldots$$

et par suite u et v, exprimés en fonction de ξ le long de C, sont d'ordre $\frac{1}{2}p$ en $(\xi - \xi_0)$. Dès lors on a

$$du + \rho\, dv = (\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2}p - 1} F(\xi - \xi_0)\, d\xi,$$

F ne devenant ni nul ni infini pour $\xi = \xi_0$; ce qui montre que $\Theta(\xi)$ contient $(\xi - \xi_0)^{p-2}$ en facteur. Ainsi :

1° La fonction $\Theta(\xi)$ admet comme pôles d'ordre un les valeurs de ξ répondant aux branches *simples* de la courbe C qui passent par les points doubles de la surface, et ces valeurs seulement;

2° Elle admet comme zéros d'ordre $p-2$ les valeurs de ξ répondant aux *cycles* d'ordre p que présente la courbe en ces mêmes points doubles. Les autres zéros de $\Theta(\xi)$ sont (n° 5) d'ordre de multiplicité pair.

8. On ne devra pas oublier, en appliquant ces résultats, qu'un point multiple d'ordre n, *à tangentes distinctes*, est formé par n branches simples; au contraire, un cycle d'ordre p comporte p branches à tangentes confondues en une seule.

Application aux courbes de genre zéro.

9. Pour une courbe unicursale C, tracée sur la surface de Kummer, on a évidemment

$$du + \rho\, dv = \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi,$$

$\Theta(\xi)$ étant une fonction rationnelle du paramètre unicursal ξ, dont chaque valeur répond à un point de la courbe et inversement.

Cette fonction ne peut être identiquement nulle quel que soit ρ, car on aurait tout le long de la courbe C, $du = dv = 0$, c'est-à-dire

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.};$$

conclusion inadmissible, car à des valeurs données de u et v correspond *toujours*, sur la surface de Kummer, un point et *jamais* une courbe : cela tient à ce que les quatre fonctions thêta auxquelles sont proportionnelles les coordonnées d'un point de la surface ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v.

Cela posé, pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie quel que soit ξ, il faut que le nombre des pôles de $\Theta(\xi)$ surpasse de *quatre unités au*

moins le nombre des zéros (on a préalablement effectué sur ξ la transformation homographique la plus générale, de manière que $\xi = \infty$ ne soit pas un point critique de l'intégrale). Comme les pôles, nécessairement simples, de $\Theta(\xi)$ ne peuvent correspondre qu'aux branches simples que présente l'unicursale aux points doubles de la surface (nº **7**), il en résulte que :

Il n'existe, sur aucune surface de Kummer, de courbe unicursale ayant au total moins de quatre branches simples en des points doubles de la surface.

Par exemple, il n'y a pas de courbe unicursale ne passant par aucun point double; donc il n'existe pas de plan touchant une surface de Kummer en trois points simples, de quadrique la touchant en neuf points simples, etc.

10. Le cas d'une unicursale C présentant en tout quatre branches simples en des points doubles de la surface mérite un examen; soient ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les valeurs du paramètre ξ qui répondent à ces quatre branches; on a nécessairement, par ce qui précède,

$$du + \rho\, dv = a \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_4)}}$$

tout le long de la courbe C, a désignant une constante. Comme ρ est arbitraire, du et dv sont de la même forme, de sorte que $du = k\, dv$ sur C; l'équation de l'unicursale sur la surface est donc

$$u = kv + \text{const.},$$

k étant constant. Mais on reconnaît bien aisément qu'une courbe définie par cette relation linéaire entre u et v ne peut être algébrique que si les quatre périodes abéliennes de $u - kv$ se réduisent à deux : on est donc placé dans le *cas elliptique*. J'ai montré ailleurs (*American Journal of Mathem.*, t. XVI) qu'en égalant à une constante convenable les deux quantités $u - kv$ dont les périodes abéliennes se réduisent à deux, on obtient au total *huit* courbes unicursales passant

chacune simplement par quatre points doubles de la surface de Kummer. Par suite :

Dans le cas elliptique, et dans ce cas seulement, on peut tracer sur la surface de Kummer des courbes unicursales présentant, au total, quatre branches simples en des points doubles de la surface; ces courbes, au nombre de huit, passent chacune simplement par quatre points doubles.

Par exemple, le *tétraédroïde* possède huit coniques, situées deux à deux dans quatre plans, et contenant quatre points doubles chacune.

On conclut de là que, pour $p = 0$, 1 ou 2, il n'existe pas de surface d'ordre n, passant simplement par p points doubles de la surface de Kummer, et touchant celle-ci en $2n^2 - p + 1$ points simples : la courbe d'intersection serait, en effet, unicursale, comme on le vérifie aisément, et aurait 0, 2 ou 4 branches simples en des points doubles de la surface, dont le nombre serait inférieur à quatre.

11. Passons maintenant au cas d'une unicursale C, présentant au total plus de quatre branches simples en des points singuliers de la surface de Kummer; la fonction rationnelle $\Theta(\xi)$ correspondante a alors plus de quatre pôles simples. Elle en a *six au moins*, comme on le reconnaît, en opérant sur ξ une transformation homographique, de manière que le point $\xi = \infty$ ne soit pas critique pour l'intégrale

$$\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi.$$

Il en résulte qu'*une unicursale tracée sur une surface de Kummer non elliptique doit présenter en tout, aux points doubles de la surface, six branches simples au moins.*

12. Admettons d'abord qu'il y ait exactement six branches simples, répondant aux valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ du paramètre ξ qui détermine les points de l'unicursale C : pour que l'intégrale $\int \sqrt{\Theta(\xi)}\, d\xi$ reste finie pour $\xi = \infty$, il faut que $\Theta(\xi)$, qui n'a que les six pôles simples

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, n'ait que deux zéros, lesquels sont nécessairement confondus (n° 7), puisque, par hypothèse, la courbe C n'a, aux points doubles de la surface, que les six branches (simples) considérées ici. On a donc, tout le long de la courbe C,

$$du + \rho\, dv = \frac{a\xi + b}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi.$$

Comme ρ est quelconque, u et v sont, le long de C, deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux* et de première espèce; en un point de C, elles ne sont donc déterminées qu'à certaines périodes près, que nous définirons de la manière suivante : Soient u' et v' deux intégrales hyperelliptiques du même type que u et v le long de la courbe C,

$$(3)\quad u' = \int \frac{a_1\xi + b_1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi, \qquad v' = \int \frac{a_2\xi + b_2}{\sqrt{(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_6)}}\, d\xi,$$

formant un système normal, c'est-à-dire admettant comme périodes quatre couples de quantités, de la forme $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'). Les intégrales u et v, le long de C, sont des fonctions linéaires de u' et v', fonctions qu'on peut supposer homogènes, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales

$$(4)\qquad u = \lambda u' + \mu v', \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'.$$

En un point de la courbe C, u' et v' ne sont déterminés qu'à une de leurs périodes près, *quelconque d'ailleurs;* si u' et v' augmentent d'une période, u et v augmentent, en vertu de (4), de quantités correspondantes. Mais u et v sont, par hypothèse, les arguments hyperelliptiques d'un point de la courbe C, c'est-à-dire de la surface de Kummer; ils ne peuvent donc avoir, en un même point, que des valeurs différant entre elles d'une période des fonctions abéliennes liées à la surface. Soit, comme au n° 5, $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') un système de périodes primitives pour u et v sur la surface; les quantités u et v définies par (4) augmenteront d'une période de ce dernier système quand u' et v' augmentent d'une période *quelconque* dérivée des périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ').

En d'autres termes, si l'on considère u' et v' comme deux variables abéliennes, *indépendantes entre elles,* de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'), les équations (4) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes des variables u' et v', admettant ces périodes, et les fonctions abéliennes des variables u et v, admettant les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g') : car, aux valeurs u' + période, v' + période, les équations (4) font correspondre, d'après ce qui précède, des valeurs de la forme u + période, v + période, c'est-à-dire un seul *point abélien* u, v.

Si nous admettons que les fonctions abéliennes en u, v (ou en u', v') ne sont pas singulières dans le sens que nous avons donné à ce mot (*Journal de Mathématiques,* 5e série, t. V, VI et VII), la transformation dont il s'agit est nécessairement une transformation ordinaire, et il est aisé de déterminer son ordre.

15. L'équation de la courbe C, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, la fonction $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta, aux périodes $(1, 0)$); $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), qui est nécessairement *paire* ou *impaire :* autrement, en effet, la courbe serait univoque (no 6); c'est-à-dire que u et v seraient des intégrales abéliennes de première espèce sur cette courbe, qui, dès lors, ne pourrait être unicursale.

D'ailleurs, le long de C, u' et v' sont deux intégrales hyperelliptiques de genre *deux,* aux périodes normales $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ'); elles sont donc liées, en vertu d'un théorème fondamental classique, par une équation $\vartheta(u', v') = 0$, en désignant par $\vartheta(u', v')$ une fonction thêta du premier ordre, aux périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (σ, τ); (τ, σ') : cette fonction est nécessairement paire ou impaire, car u et v n'étant simultanément définis qu'au signe près le long de C, il en est de même de u' et v', d'après (4).

Cela posé, si la transformation définie par les équations (4) est d'ordre n, ces équations font correspondre, à un point abélien u, v, n^2 points abéliens u', v', dont les arguments diffèrent de certains $n^{\text{ièmes}}$ de périodes; on aura donc, d'après la théorie de la transformation, appliquée à la fonction $\Theta(u, v)$,

$$(5)\quad \Theta(u, v) = e^{P(u', v')}\vartheta(u', v')\vartheta(u'+\alpha_2, v'+\beta_2)\ldots\vartheta(u'+\alpha_{n^2}, v'+\beta_{n^2}),$$

en désignant par $P(u', v')$ un polynome du second ordre en u', v' et par $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{n^2}, \beta_{n^2}$, des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes convenables.

Or, on sait qu'une fonction thêta d'ordre p en u, v a pour transformée en u', v' une fonction thêta d'ordre pn; si p est l'ordre de $\Theta(u, v)$, l'ordre du second membre de (5), qui est évidemment n^2, devant être égal à pn, on aura

$$n = p.$$

Ainsi la transformation que nous étudions a pour ordre l'ordre même de $\Theta(u, v)$, ou, si l'on veut, la moitié du degré de la courbe $\Theta(u, v) = 0$, c'est-à-dire de C [1].

14. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Soit une surface de Kummer liée à des fonctions abéliennes dérivant du radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}$; *supposons qu'une courbe unicursale, tracée sur elle, et de degré* $2p$, *présente en tout six branches simples aux points doubles de la surface, et désignons par* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ *les valeurs du paramètre unicursal correspondantes; les fonctions abéliennes dérivées respectivement des deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation d'ordre p.

Nous reviendrons plus loin sur ce théorème et sur sa réciproque, et nous en ferons quelques applications.

15. Le cas d'une courbe unicursale ayant plus de six branches simples au total en des points doubles de la surface de Kummer paraît moins intéressant. Le long d'une telle courbe, u et v se présentent sous

(1) Car, sur la surface de Kummer définie paramétriquement par le procédé de M. Weber, la courbe $\Theta(u, v) = 0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta, paire ou impaire, d'ordre p, est coupée par un plan en $\frac{1}{2}.2.2.p$ points; elle est donc d'ordre $2p$.

la forme d'intégrales hyperelliptiques de genre supérieur à deux, et comme elles ne peuvent admettre que quatre paires de périodes simultanées, on a un exemple géométrique d'intégrales réductibles au genre *deux*. Nous n'insisterons pas sur ce point.

16. *Courbes de genre un.* — Il est aisé d'établir, en suivant les méthodes précédentes, que, en dehors du cas elliptique, une courbe de genre *un*, tracée sur la surface de Kummer, présente en tout quatre branches au moins en des points singuliers de la surface. Par suite, il n'existe pas de plan tangent à la surface en deux points simples; pas de quadrique tangente en huit points simples, etc.

Application aux courbes de genre deux.

17. Nous ne traiterons que des courbes de genre *deux* (tracées sur la surface de Kummer) ne passant par aucun des seize points doubles.

Soient C une pareille courbe; C′ une courbe plane du quatrième ordre, à un point double, lui correspondant point par point, et d'équation $f(x, y) = 0$. Les différentielles $du + \rho\, dv$ prises sur la surface le long de C ont pour expression le long de C′ (n° 5)

$$du + \rho\, dv = \frac{\sqrt{F_2(x, y)}}{f'_y}\, dx,$$

$F_2(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation d'une conique *biadjointe* à C′, c'est-à-dire ayant un point double au point double de C′. La conique $F_2 = 0$ se décompose donc en deux droites passant par ce point et qui, de plus, doivent être soit confondues, soit tangentes à C′ (n° 5) : mais les tangentes menées à C′ par son point double sont au nombre de six, et l'équation simultanée de deux d'entre elles ne peut contenir de paramètre arbitraire; comme $F_2(x, y)$ doit évidemment dépendre du paramètre ρ, il faut que les deux droites qui composent la conique $F_2 = 0$ soient confondues. En d'autres termes, du et dv sont de la forme

$$\frac{ax + by + c}{f'_y}\, dx,$$

la droite $ax + by + c = 0$ passant par le point double de C′; u et v sont donc *deux intégrales abéliennes de première espèce* appartenant à cette courbe.

Il en résulte qu'on peut séparer analytiquement, le long de C′ ou de C, les arguments u, v et $-u$, $-v$ qui correspondent à un même point; C est donc une courbe *univoque*, c'est-à-dire que son équation, sur la surface de Kummer, s'obtient en annulant une fonction thêta, de u et v, qui n'est ni paire, ni impaire.

18. Soient maintenant u' et v' deux intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à C′ (ou, ce qui revient au même, à C) et formant un système normal, c'est-à-dire ayant des couples de périodes du type $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ'); en un point de C, u' et v' prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période, et cette période peut être *quelconque*. Comme C est de genre *deux*, u et v sont, le long de cette courbe, linéaires en u' et v' :

$$(6)\qquad u = \lambda u' + \mu v'; \qquad v = \lambda' u' + \mu' v'.$$

D'ailleurs, en un point de C, u et v prennent des valeurs qui diffèrent entre elles d'une période dérivée des périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g') liées aux arguments u et v sur la surface de Kummer; il en résulte que, u' et v' augmentant d'une *quelconque* de leurs périodes, u et v, définis par (6), augmentent d'une des leurs. Par suite (n° **12**), les équations (6) établissent une *transformation* entre les fonctions abéliennes de u, v, aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'), et les fonctions abéliennes de u', v', aux périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (σ, τ), (τ, σ').

Si la transformation est ordinaire, ce qui est le cas certain pour des fonctions abéliennes non singulières, soit n son ordre; $\Theta(u, v)$ étant le premier membre de l'équation de C sur la surface de Kummer, on a, comme au n° **15**,

$$(7)\quad \Theta(u, v) = e^{P(u', v')}\,\mathfrak{I}(u', v')\,\mathfrak{I}(u' + \alpha_2, v' + \beta_2)\ldots\mathfrak{I}(u' + \alpha_{n^2}, v' + \beta_{n^2}),$$

d'où l'on conclut encore que n est égal à l'ordre, p, de la fonction thêta $\Theta(u, v)$.

Dans cette équation, $\mathfrak{I}(u', v')$ désigne, comme au n° **15**, une fonction

thêta d'ordre un, aux périodes $(1, 0), (0, 1), (\sigma, \tau), (\tau, \sigma')$: mais cette fonction n'est plus paire ou impaire, parce que $\Theta(u, v)$ ne l'est pas.

Le degré de la courbe C est d'ailleurs égal à $4p$, car le nombre des zéros communs à $\Theta(u, v)$ et à une fonction thêta du second ordre est $4p$, et ces zéros ne sont pas deux à deux égaux et de signes contraires, puisque $\Theta(u, v)$ n'est ni paire ni impaire.

19. Complétons ces résultats par une interprétation géométrique. Soient K la surface de Kummer initiale sur laquelle est tracée C, et K' une surface analogue définie de la même manière à l'aide des fonctions abéliennes en u' et v'. En vertu de (6), à un point u', v' de K' répond un seul point u, v de K, et à un point de K répondent p^2 points de K', puisque la transformation (6) est d'ordre p. Quand le point u, v décrit sur K la courbe C, l'équation (7) montre que les p^2 points u', v' correspondants décrivent, sur K', les p^2 courbes distinctes

$$\Xi(u', v') = 0, \qquad \Xi(u' + \alpha_2, v' + \beta_2) = 0, \qquad \ldots,$$

dont chacune, dès lors, correspond à C *point par point*. D'ailleurs, la courbe $\Xi(u', v') = 0$, où $\Xi(u', v')$ est une fonction thêta d'ordre *un*, ni paire ni impaire, est la section de K' par un plan tangent, et a pour modules les modules mêmes des fonctions abéliennes liées à K' ([1]).

Observons encore qu'en désignant par α et β deux constantes, la courbe définie sur K par l'équation $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$ correspond évidemment point par point à $\Theta(u, v) = 0$; c'est donc une courbe de même genre (*deux*) et de mêmes modules que C; elle est aussi de même degré, $4p$.

Enfin, chacune des courbes $\Theta(u + \alpha, v + \beta) = 0$, y compris C, est l'intersection complète de la surface K avec une surface d'ordre p ([2]); en général, une telle intersection est de genre $2p^2 + 1$ et, pour qu'elle soit de genre *deux*, il faut qu'elle admette $2p^2 - 1$ points doubles (ou des points multiples d'ordre supérieur en nombre équivalent); la surface d'ordre p touchera donc la surface de Kummer en $2p^2 - 1$ points.

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 112.

([2]) *Ibid.*, t. IX, p. 155.

20. On peut donc énoncer ce résultat :

Soit, sur une surface de Kummer, une courbe de genre deux *ne passant par aucun des seize points doubles : cette courbe est de degré* $4p$; *elle appartient à un groupe doublement infini de courbes de même degré, de même genre et de mêmes modules, également tracées sur la surface et ne passant par aucun point double. Chacune de ces courbes, y compris la proposée, est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre* p, *qui la touche en* $2p^2-1$ *points; ses modules sont ceux de fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre* p, *à celles qui définissent la surface primitive.*

Réciproquement : *Toute surface d'ordre* p *touchant la surface de Kummer en* $2p^2-1$ *points et ne passant par aucun de ses seize points doubles, la coupe suivant une courbe de degré* $4p$ *et de genre* deux, *dont les modules jouissent de la propriété précédente.*

Une autre réciproque, à peu près évidente, est celle-ci :

Soient K *et* K′ *deux surfaces de Kummer transformées l'une de l'autre par une transformation ordinaire d'ordre* p, *c'est-à-dire telles qu'à un point de* K′ *réponde un point de* K *et, à un point de* K, p^2 *points de* K′ : *aux sections de* K′ *par ses plans tangents correspondent, point par point, sur* K, *des courbes d'ordre* $4p$, *de genre* deux, *ayant toutes pour modules ceux des fonctions abéliennes qui définissent la surface* K′.

21. De cet ensemble de propositions résulte le théorème général :

Les surfaces d'ordre p *qui touchent une surface de Kummer en* $2p^2-1$ *points, c'est-à-dire la coupent suivant des courbes de genre* deux, *et qui ne passent par aucun des seize points singuliers, se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations ordinaires, non équivalentes, d'ordre* p; *chaque groupe est lié à une de ces transformations.*

Les surfaces d'un groupe sont en nombre doublement infini et coupent la surface de Kummer proposée suivant des courbes de

degré $4p$ et de genre deux *qui ont les mêmes modules : ces modules sont ceux des fonctions abéliennes transformées, par la transformation qui correspond au groupe, des fonctions abéliennes liées à la surface de Kummer initiale.*

On a ainsi une représentation géométrique très simple des transformations d'un ordre donné et des équations modulaires correspondantes.

Par exemple, si p est premier, il y a $1+p+p^2+p^3$ transformations non équivalentes d'ordre p (Hermite); nous aurons donc ce même nombre pour nos groupes de surfaces d'ordre p. Ainsi, il y a quarante groupes de surfaces du troisième ordre touchant chacune la surface de Kummer en dix-sept points; quinze groupes de quadriques tangentes en sept points, etc.

22. On peut rattacher à cette théorie les résultats donnés plus haut (n° **14**) à propos de certaines courbes unicursales.

Reprenons les deux surfaces de Kummer K et K' introduites tout à l'heure : aux sections de K' par ses plans tangents correspondaient point par point, sur K, des courbes de genre *deux* et de degré $4p$. Si $\mathfrak{S}(u', v') = 0$ est l'équation d'une des sections considérées sur K', et si $\Theta(u, v) = 0$ est celle de la courbe correspondante sur K, on a (7)

$$\Theta(u, v) = e^{P(u',v')}\mathfrak{S}(u', v')\mathfrak{S}(u'+\alpha_2, v'+\beta_2), \ldots, \mathfrak{S}(u'+\alpha_{p^2}, v'+\beta_{p^2}).$$

Parmi les sections de K' par ses plans tangents figurent les seize coniques de cette surface; soit $\mathfrak{S}_0(u', v') = 0$ l'une d'elles. La fonction $\mathfrak{S}_0(u', v')$ est un des seize thêtas normaux d'ordre *un;* elle est paire ou impaire. On en déduit immédiatement que la fonction $\Theta(u, v)$ correspondante, que je désignerai par $\Theta_0(u, v)$, est aussi paire ou impaire; de plus, $\mathfrak{S}_0(u', v')$ s'annule pour six demi-périodes de u', v'; d'où l'on conclut que $\Theta_0(u, v)$ s'annule six fois pour des demi-périodes de u, v. Plus exactement, la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a six branches simples en des points doubles de K. Cette courbe est d'ailleurs de degré $2p$, au lieu de $4p$, à cause de la parité ou de l'imparité de $\Theta_0(u, v)$; elle est unicursale, puisqu'elle répond point par point à la conique $\mathfrak{S}_0(u', v') = 0$.

23. Réciproquement, toute unicursale de degré $2p$, tracée sur K, et présentant en tout six branches simples aux points doubles de cette surface, appartient, comptée deux fois, à un des *groupes* de courbes de genre *deux* et d'ordre $4p$ rencontrés tout à l'heure. Car si $\Theta_0(u, v) = 0$ est son équation, je dis que les courbes

$$\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$$

sont de degré $4p$ et de genre *deux*.

1° Elles sont d'un degré double du degré de $\Theta_0(u, v) = 0$, car la fonction $\Theta_0(u, v)$ est nécessairement paire ou impaire (n° **15**) et la fonction $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta)$ n'a plus cette propriété, tout en ayant, comme fonction thêta, le même ordre que la précédente.

2° Elles sont de genre *deux*, car on peut établir entre les courbes $\Theta_0(U, V) = 0$ et $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$ la correspondance

$$U = u + \alpha, \qquad V = v + \beta,$$

qui à un point u, v ne fait correspondre qu'un point U, V, et à un point U, V fait correspondre les deux points $u = \varepsilon U - \alpha$, $v = \varepsilon V - \beta$, ε désignant ± 1. D'ailleurs, ces deux derniers points ne coïncident que si U, V est une demi-période, ce qui se présente en tout six fois, puisque la courbe $\Theta_0(U, V) = 0$ n'a que six branches simples aux points doubles de K : le genre ρ de la courbe $\Theta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0$ s'obtient dès lors par la formule de M. Zeuthen sur les genres de deux courbes correspondantes, ce qui donne ici

$$2(\rho - 1) = 2.2.(0 - 1) + 6, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = 2.$$

24. Il résulte de là et du théorème du n° **14** que, pour obtenir les modules de toutes les fonctions abéliennes liées, par une transformation d'ordre p, aux fonctions abéliennes qui définissent une surface de Kummer donnée K, on pourra procéder ainsi: on cherchera à déterminer sur K les unicursales d'ordre $2p$ qui présentent en tout six branches simples aux points doubles de la surface; ces courbes se répartissent en autant de groupes qu'il y a de transformations non équivalentes d'ordre p. Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ sont les valeurs du paramètre unicursal qui correspond, sur une des courbes, aux six branches simples passant

par des points doubles, le radical $\sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$ donnera naissance (nº **14**) à des fonctions abéliennes liées aux fonctions primitives par une transformation d'ordre p.

Transformations d'ordre trois.

25. Pour les transformations du troisième ordre, on doit, d'après ce qui précède, chercher les courbes unicursales de degré *six* ayant en tout six branches simples aux points singuliers. Or (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 42), les courbes d'ordre *six* se divisent en deux grandes classes : celles de la première passent simplement par six points doubles, celles de la seconde par dix. Les premières sont donc seules admissibles. Elles se répartissent (*ibid.*) en seize familles, quadruplement infinies chacune, et qui sont transformées l'une de l'autre par une des quinze transformations homographiques de la surface en elle-même (ces transformations font répondre à un point u, v le point $u+\frac{1}{2}$ période, $v+\frac{1}{2}$ période). Il suffit donc de considérer une des seize familles : les courbes correspondantes sont (*ibid.*) les intersections de la surface de Kummer K avec des quadriques menées par une des seize coniques, γ. Une pareille courbe est, en général, de genre *quatre* (*ibid*, p. 141); pour qu'elle soit unicursale, il faut qu'elle ait quatre points doubles, distincts des points singuliers de K, puisqu'en ces derniers points il ne peut y avoir, en tout, que six branches simples. Ainsi, tout revient à déterminer, parmi les quadriques en nombre quatre fois infini qui passent par la conique γ, celles qui touchent la surface de Kummer en quatre points (simples). Il y en a en tout quarante, puisqu'il y a quarante transformations non équivalentes d'ordre *trois* (nos **21**, **24**). En projetant la figure à partir d'un des points doubles de K, non situés sur γ, on arrive sans difficulté à ce résultat [1] :

Soient ABC *et* A'B'C' *deux triangles circonscrits à une même conique; désignons par a_1, a_2, ..., a_6 les arguments des six côtés considérés comme tangents à la conique.*

---

[1] *Voir*, à ce sujet, notre Mémoire *Sur les fonctions abéliennes singulières* (ce Journal, 5e série, t. V, p. 342-344).

Il y a quarante courbes unicursales du sixième ordre passant par les sommets des deux triangles et en outre bitangentes aux six côtés; si $\xi_1, \ldots, \xi_6$ sont les arguments unicursaux qui répondent aux six sommets sur une de ces courbes, les fonctions abéliennes des deux radicaux

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad et \quad \sqrt{(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_6)}$$

sont liées par une transformation du troisième ordre.

On obtient ainsi les quarante transformations non équivalentes de cet ordre.

Transformations d'ordre deux.

26. Les courbes d'ordre quatre, sur la surface de Kummer ordinaire, sont les sections planes et des biquadratiques dont chacune passe par *huit* points doubles (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, p. 79). Les quartiques ayant *six* branches simples en des points singuliers ne peuvent donc appartenir qu'à la catégorie des sections planes; et ce seront nécessairement les sections faites par des plans contenant trois points doubles. On doit rejeter les seize coniques qui sont d'ordre deux et non d'ordre quatre; or il y a en tout $\frac{1}{6}16\times15\times14$ plans menés par trois des seize points doubles; parmi eux figure chacun des seize plans singuliers compté $\frac{1}{6}6\times5\times4$ fois, puisqu'il contient six points doubles; il reste donc $\frac{1}{6}16[15\times14-6\times5\times4]$, ou 240 plans non singuliers contenant trois points doubles chacun. D'ailleurs, ces plans sont transformés les uns des autres par les quinze transformations homographiques de la surface en elle-même, de sorte qu'il n'y a à considérer que 240 : 16, c'est-à-dire quinze, d'entre eux. Ce nombre de quinze est, comme cela devait être, celui des transformations non équivalentes du second ordre. Ainsi :

Soient K *une surface de Kummer et* A_1, A_2, A_3 *trois de ses points doubles non situés dans un même plan singulier; la section de* K *par le plan* A_1, A_2, A_3 *est une quartique unicursale, admettant* A_1, A_2 *et* A_3 *comme points doubles : les six arguments de ces points sur l'unicursale sont les racines d'un polynome du*

sixième ordre dont la racine carrée donne naissance à des fonctions abéliennes liées, par une transformation quadratique, à celles dont dépend la surface de Kummer proposée.

27. On peut donner à ce résultat une forme bien autrement élégante.

Observons d'abord qu'en vertu des propriétés générales de la surface de Kummer, il existe un point double A_0 de cette surface, tel que le tétraèdre $A_0 A_1 A_2 A_3$ n'admette pour face aucun plan singulier de K. Dès lors, les six plans singuliers qui contiennent le point A_0 passent, deux par deux, par les trois droites $A_0 A_1$, $A_0 A_2$, $A_0 A_3$, et coupent le plan $A_1 A_2 A_3$ suivant six droites tangentes à une même conique (τ), qui est la section du cône des tangentes à la surface K en A_0. Les rapports anharmoniques des six droites précédentes quatre à quatre sont, d'ailleurs, comme on sait, les modules de K, c'est-à-dire ceux des fonctions abéliennes liées à cette surface.

Cela posé, prenons, dans le plan $A_1 A_2 A_3$, le triangle $A_1 A_2 A_3$ pour triangle de référence, $xyz = 0$; la quartique unicursale considérée plus haut, admettant A_1, A_2 et A_3 comme points doubles, est la transformée d'une conique (σ) par la substitution

$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}, \qquad z' = \frac{1}{z};$$

aux points A_1, A_2, A_3 considérés comme appartenant successivement aux branches de la quartique qui s'y croisent, correspondent les six points où la conique (σ) coupe les six côtés du triangle de référence. Ainsi, les modules des fonctions abéliennes, liées à celles qui définissent K par la transformation quadratique du théorème précédent, sont les rapports anharmoniques, quatre à quatre, des six points où les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ coupent (σ).

D'un autre côté, nous avons dit tout à l'heure que les modules des fonctions abéliennes liées à K sont les rapports anharmoniques des six droites, tangentes à la conique (τ), suivant lesquelles le plan $A_1 A_2 A_3$ coupe les six plans singuliers menés par A_0 : ces six droites sont évidemment les six tangentes qu'on peut mener à la quartique unicursale envisagée, par les points A_1, A_2, A_3; on vérifie directement, par la

Géométrie analytique, que leurs rapports anharmoniques quatre à quatre, sur la conique qu'elles touchent, sont les mêmes que ceux des six tangentes qu'on peut mener à la conique (σ) par A_1, A_2, A_3. Par conséquent :

Soit donné un radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)}$; *marquons sur une conique quelconque* (σ) *les six points qui ont pour arguments unicursaux les quantités* $a_1, a_2, \ldots, a_6$ *et joignons-les deux à deux par trois droites, de manière à former un triangle* T *dont chaque côté contienne deux des six points et dont aucun sommet ne soit sur la conique. Il y a quinze pareils triangles.*

Prenons maintenant le triangle polaire de T *par rapport à la conique; soient* $b_1, b_2, \ldots, b_6$ *les arguments des six points où ses côtés coupent la courbe; les deux radicaux*

$$\sqrt{(x-a_1)\ldots(x-a_6)} \quad \textit{et} \quad \sqrt{(x-b_1)\ldots(x-b_6)}$$

donnent naissance à deux systèmes de fonctions abéliennes liés l'un à l'autre par une transformation du second ordre.

Aux quinze triangles T *correspondent ainsi les quinze systèmes qui dérivent du système primitif par une transformation quadratique.*

28. Analytiquement, cette construction conduit au résultat suivant :

Les quinze transformations quadratiques des fonctions abéliennes dérivées du radical $\sqrt{x^6 + Ax^5 + \ldots + Ex + F}$ sont liées respectivement aux quinze décompositions du polynome sous le radical en trois facteurs du second degré.

Soit une de ces décompositions

$$(x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2)(x^2 + p_3 x + q_3);$$

le polynome du sixième ordre qui donne naissance aux fonctions abéliennes de la transformation correspondante est

$$\begin{aligned} &[x^2(p_2-p_1) + x(q_2-q_1) + p_1 q_2 - p_2 q_1] \\ \times &[x^2(p_3-p_2) + x(q_3-q_2) + p_2 q_3 - p_3 q_2] \\ \times &[x^2(p_1-p_3) + x(q_1-q_3) + p_3 q_1 - p_1 q_3]. \end{aligned}$$

29. Terminons par quelques propositions relatives aux quadriques sept fois tangentes à la surface de Kummer. D'abord, en vertu de nos théorèmes généraux :

Il y a quinze groupes, doublement infini chacun, de quadriques touchant en sept points une surface de Kummer K *et ne passant par aucun des seize points singuliers de cette surface; les quadriques d'un même groupe coupent* K *suivant des courbes d'ordre huit, de genre deux, qui ont les mêmes modules; ces modules sont ceux d'un des quinze systèmes de fonctions abéliennes liées, par transformation quadratique, aux fonctions dont dépend la surface de Kummer proposée.*

Si $\Theta_0(u, v) = 0$ *est l'équation de la section faite sur* K *par un plan non singulier contenant trois points doubles de* K, *les courbes de genre deux ci-dessus, appartenant à un même groupe, sont données par l'équation* $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$, *où* α *et* β *désignent deux constantes arbitraires.*

D'après cela, les courbes $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ ont *sept points doubles;* mais ces points doubles sont de deux espèces.

Quatre d'entre eux ont pour arguments les solutions communes aux deux équations $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$, $\Theta_0(-u+\alpha, -v+\beta) = 0$: ces solutions sont au nombre de $2.2.2$, ou 8, puisque $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta du second ordre; comme elles sont deux à deux égales et de signe contraire, elles ne donnent bien que quatre points doubles de la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$.

On obtient les *trois* autres points doubles comme il suit. Désignons par ω, ω' une des trois demi-périodes qui annulent (doublement) $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire les arguments u, v d'un des trois points singuliers de K que contient la section plane $\Theta_0(u, v) = 0$: il est clair que le point d'arguments $\omega - \alpha$, $\omega' - \beta$ sera un point double sur la courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$. On trouve donc ainsi trois points doubles, dont les arguments diffèrent de demi-périodes, ce qui conduit à de nombreuses propriétés, faciles à énoncer, de ces groupes de trois points.

La courbe $\Theta_0(u+\alpha, v+\beta) = 0$ étant de genre deux est hyperellip-

tique et ses points sont, par suite, deux à deux conjugués. Si (u, v) est un de ces points, le conjugué est évidemment $(-2\alpha - u, -2\beta - v)$; les deux conjugués coïncident si $u + \alpha$, $v + \beta$ est une demi-période, ce qui ne se produit que pour les trois points doubles de la seconde espèce. Ces points, considérés comme appartenant successivement à chacune des deux branches de la courbe de genre deux qui s'y croisent, sont donc les six points de *diramation* de cette courbe.

Sur les racines des équations transcendantes [1] *à coefficients rationnels;*

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Nous avons vu [2] que les équations différentielles rationnelles en y et ses dérivées, en particulier les équations dont le premier membre est un polynome entier en y, et dont les coefficients sont, soit des polynomes entiers en x, soit des séries en $\frac{1}{x}$ dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance, ne peuvent admettre comme solutions des séries en $\frac{1}{x}$ remplissant certaines conditions analogues.

Si l'on considère les équations algébriques ou transcendantes dont le premier membre est ce que nous appelons une *série rationnelle*, c'est-à-dire une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x, qui peut être une fonction entière, admettre des pôles ou même un point singulier essentiel, et dont les

(1) *Comptes rendus*, 15 avril 1901.

(2) *Ibid.*, 25 février et 11 mars 1901.

coefficients sont rationnels, on peut établir un théorème correspondant : les solutions réelles de ces équations, exprimées dans un système de numération de base quelconque, ne peuvent présenter, dans la partie fractionnaire, des suites de zéros dont l'étendue croît trop vite. Une propriété semblable a lieu pour les solutions imaginaires.

Ce théorème est déjà connu pour les solutions des équations algébriques ([1]); nous allons, en précisant certains points dans ce cas particulier, établir la propriété plus générale que nous venons d'énoncer.

II.

Soit

$$(1) \qquad X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}} + \ldots,$$

ψ_l étant un entier croissant, un nombre exprimé dans le système de numération de base q, X_1 étant un entier qui peut être nul et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des entiers différents de zéro et $\overline{\gtrless} q-1$ en valeur absolue.

Considérons une série à coefficients rationnels

$$(2) \qquad fx = \theta_0 + \theta_1 x^{\varpi_1} + \ldots + \theta_n x^{\varpi_n} + \ldots,$$

où ϖ_n est un nombre croissant fonction de n, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \neq 0$ étant rationnels, θ_0 entier. fx est un polynome ou une série convergente dans un certain domaine où X est compris.

Soit $\frac{p_l}{q_l}$ la fraction obtenue en s'arrêtant dans X au terme d'indice l, et

$$(3) \qquad f(x) = \varphi_n(x) + R_n(x),$$

φ_n étant l'ensemble des termes d'exposant $\leq \varpi_n$ dans (2).

Si l'on a $\varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$, on n'aura évidemment pas $\varphi_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$. Nous

([1]) Liouville, *Journ. de Math.*, 1851, et Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 26; 1898.

ne considérerons que les valeurs de n telles que

$$(4)\qquad \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \neq 0.$$

On aura

$$(5)\qquad \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \frac{A}{Tq_l^{\varpi_n}} \geqq \frac{1}{Tq_l^{\varpi_n}},$$

T étant le dénominateur commun à $\theta_1, \ldots, \theta_n$ et A un entier $\neq 0$.

D'autre part,

$$(6)\qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots.$$

Considérons des valeurs de l, par suite de q_l, ne dépassant pas certaines limites, d'ailleurs aussi grandes qu'on veut, et prenons θ_{n+1}, θ_{n+2}, ... assez petits, ou quand $X < 1$, ϖ_{n+1}, ϖ_{n+2}, ... assez grands (¹) pour que

$$(7)\qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots < \frac{1}{2Tq_l^{\varpi_n}},$$

ce qui est toujours possible. On aura

$$(8)\qquad \left|f\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| = \left|\varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| > \left|\frac{1}{2Tq_l^{\varpi_n}}\right|.$$

D'autre part, supposons que X soit une racine de $fx = 0$, d'ordre α de multiplicité. On aura, en posant

$$h = \frac{p_l}{q_l} - X,$$

$$f\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = f(X + h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}[f^{(\alpha)}(X) + \varepsilon].$$

(¹) Nous donnons plus loin un exemple de chacun de ces cas. On pourrait combiner sans difficulté les deux hypothèses dans l'application des formules (8) et (9). Nous croyons inutile d'insister pour le moment.

D'une part, on peut toujours prendre l assez grand pour que

$$|f^{(\alpha)}(X)| + \varepsilon < 2|f^{(\alpha)}(X)|,$$

et, d'autre part, on a plus généralement

$$|f^{(\alpha)}(X)| + \varepsilon < \lambda |f^{(\alpha)}X| \qquad (\lambda \text{ fini}).$$

Donc

$$(9) \qquad |h|^{\alpha} = \alpha! \left| f\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \frac{1}{|f^{(\alpha)}(X)| + \varepsilon} \right| > \frac{\alpha!}{2\lambda T q_l^{\varpi_n} |f^{(\alpha)}X|}.$$

Or, quels que soient $\varpi_1, \dots, \varpi_n$ et q_l, on pourra toujours prendre ψ_{l+1} assez grand pour que $|h|^{\alpha}$ soit plus petit que le second membre. On en conclut ainsi :

Théorème I. — *Soient*

$$fx = \theta_0 + \theta_1 x^{\varpi_1} + \dots + \theta_n x^{\varpi_n} + \dots \text{ (}^1\text{)}$$

une série rationnelle (ou un polynome) ($\varpi_1, \dots, \varpi_n$ entiers croissants, θ_0 entier, $\theta_1, \dots, \theta_n$ rationnels) convergente dans le domaine où se trouve compris

$$X = X_1 + \sum \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}}$$

(ψ_l entier positif croissant, α_l entier $\leqq q - 1$ en valeur absolue), X étant un nombre rationnel ou non exprimé dans le système de numération de base q; soit $\frac{p_l}{q_l}$ la fraction obtenue en s'arrêtant dans X au terme d'indice l ($q_l = q^{\psi_l}$).

$\theta_1, \dots, \theta_n, \varpi_1, \dots, \varpi_n, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \psi_1, \dots, \psi_l$ étant quelconques, si l'on prend $\theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \dots$ assez petits, ou, quand $X < 1$, $\varpi_{n+1}, \varpi_{n+2}, \dots$ assez grands pour que

$$(7) \qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left|\theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \dots\right| < \frac{1}{2Tq_l^{\varpi_n}}$$

---

(1) Il est bien évident que l'équation n'a pas la racine $\frac{p_l}{q_l}$ si l est assez grand.

(T *dénominateur commun à* $\theta_1, \ldots, \theta_n$), *ce qui est toujours possible*, X *ne pourra être racine de* $fx = 0$ *que si*

$$\left| X - \frac{p_l}{q_l} \right|^\alpha > \frac{\alpha!}{4\mathrm{T} q_l^{\varpi_n} \mathrm{M}} \tag{9}$$

(α *ordre de multiplicité de la racine* X, M *nombre fini convenablement choisi*). *Par suite, on peut toujours prendre* ψ_{l+1} *assez grand pour que* X *ne soit pas racine de* $fx = 0$.

En résumé, quand, dans fx les θ_n allant en décroissant, un certain coefficient θ_{n+1} est suffisamment plus petit que les précédents, il suffit que X présente un nombre suffisant de zéros consécutifs dans la partie décimale pour que cette quantité ne puisse être racine de $f = 0$: ceci même si X est une fraction limitée ou fx un polynome. On a une propriété analogue relative aux exposants ϖ_n quand $X < 1$.

Nous croyons utile de donner deux exemples précis d'application de ce théorème.

Premier exemple. — Supposons

$$\theta_n = \frac{a_n}{t_n},$$

a_n entier fini et $\neq 0$, θ_0 entier quelconque, t_n étant un entier positif fonction de n contenant en facteur $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots$, et $\varpi_n = n$. On a

$$\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{t_{n+2}}\frac{p_l}{q_l} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{T} = t_n.$$

Supposons, d'après (7),

$$\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2t_n q_l^n}. \tag{10}$$

Soit

$$\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots;$$

on aura

$$\left|\frac{u_{n+i+1}}{u_{n+i}}\right| \leqq k \leqq \tfrac{1}{2},$$

dès que

(11) $$\mathrm{D}\left|\frac{t_{n+i}}{t_{n+i+1}}\right|\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \leqq k \leqq \tfrac{1}{2}$$

$\left(\text{D étant le maximum du rapport } \left|\frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right|\right)$. On en conclut

$$\left|\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\right| < |u_{n+1}|(1+k+k^2+\ldots) = \frac{|u_{n+1}|}{1-k} < 2|u_{n+1}|.$$

Il suffira, pour que (10) ait lieu, que

$$2|u_{n+1}| < \frac{1}{2t_n q_l^n}, \qquad \frac{|a_{n+1}|}{t_{n+1}}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1} < \frac{1}{4t_n q_l^n}.$$

ou

$$t_{n+1} > 4t_n q_l^n \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1} |a_{n+1}|.$$

Si l'on observe que

$$\frac{p_l}{q_l} < 2\mathrm{X},$$

il suffira, *a fortiori*, que

(12) $$t_{n+1} > 4t_n q_l^n (2\mathrm{X})^{n-1} |a_{n+1}| = 4t_n |a_{n+1}| (2\mathrm{X})^{n-1} q^{n\psi_l}.$$

(11) a alors lieu.

D'autre part

$$|h| < \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}},$$

et il suffit, pour que (9) soit impossible, que

$$\frac{\alpha!}{4t_n q^{n\psi_l}\mathrm{M}} > \frac{1}{q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}},$$

ou

(13) $$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha} > \frac{4t_n}{\alpha!}\mathrm{M}\, q^{n\psi_l},$$

M étant fini.

Les formules (7) et (9) sont ainsi remplacées par (12) et (13).

Soit

$$t_n = r^{\chi_n};$$

(12) donne

$$r^{\chi_{n+1}} > 4 r^{\chi_n} |a_{n+1}| q^{n\psi_l} (2X)^{n+1},$$

ou

$$q^{-n\psi_l} r^{\chi_{n+1}-\chi_n} > 4 |a_{n+1}| (2X)^{n+1}$$

d'une part, et (13) donne

$$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-n\psi_l} > \frac{4M}{\alpha!} r^{\chi_n},$$

ou

$$q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-n\psi_l} r^{-\chi_n} > \frac{4M}{\alpha!}.$$

Il suffira de poser, si $q^\lambda = r$, par exemple :

$$q^{\lambda(\chi_{n+1}-\chi_n)-n\psi_l} \geqq q^{nv},$$
$$q^{\psi_{l+1}-n\psi_l-\lambda\chi_n} \geqq q^{v}$$

(v fonction croissante de n), c'est-à-dire

(14)
$$\begin{cases} \lambda(\chi_{n+1}-\chi_n) - n\psi_l \geqq nv, \\ \psi_{l+1} - n\psi_l - \lambda\chi_n \quad \geqq v, \end{cases}$$

où λ est fini.

α. Si $1 \leqq \lambda < 2$, il suffira de prendre

(15) $$l = n, \qquad \chi_n = n!\,n + k'_n, \qquad \psi_n = n!\,n + k''_n,$$

k'_n et k''_n étant $\leqq (n-1)!$ en valeur absolue, car (14) devient

$$\begin{cases} \lambda[n!(n+1)^2 + k'_{n+1} - n!\,n - k'_n] - n!\,n^2 - nk''_n \geqq n^2, \\ n!(n+1)^2 - n!\,n^2 - \lambda(n!\,n + k'_n) + k''_{n+1} - nk''_n \geqq n, \end{cases}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}(\lambda-1)n!\,n^2+n!\,n(2\lambda-1)+\lambda(n!+k'_{n+1}-k_n)-nk''_n \geqq n^2,\\ n!\,n(2-\lambda)+n!-\lambda k'_n+k''_{n+1}-nk''_n\geqq n,\end{array}\right.$$

ce qui a lieu quand $1\leqq\lambda<2$, pour n assez grand.

β. Quel que soit λ, il suffira de prendre

$$l=n,\qquad \lim\frac{\psi_n}{\chi_n}=1 \text{ pour } n=\infty$$

et $\frac{\chi_{n+1}}{n\chi_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissant indéfiniment avec n.

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

Corollaire I. — La fraction

$$X=X_1+\frac{\alpha_1}{q^{k''_1+1}}+\ldots+\frac{\alpha_n}{q^{k''_n+n!n}}+\ldots$$

où X_1 et q sont des entiers quelconques et où α_1, …, α_n, … sont des entiers positifs ou négatifs dont la valeur absolue est $\leqq q-1$ et $\neq 0$, n'est solution d'aucune des équations

$$0=fx=a_0+\frac{a_1x}{r^{k'_1+1}}+\frac{a_2x^2}{r^{k'_2+2!2}}+\ldots+\frac{a_nx^n}{r^{k'_n+n!n}}+\ldots,$$

où r est entier, et où $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers limités positifs ou négatifs quand $q\leqq r<q^2$ [k'_n et $k''_n\leqq(n-1)!$]. Le premier membre de cette équation est évidemment une fonction entière.

De même la fraction

$$X=X_1+\frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}}+\ldots+\frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}}+\ldots$$

n'est solution d'aucune des équations

$$0=fx=a_0+\frac{a_1x}{r^{\chi_1}}+\ldots+\frac{a_nx^n}{r^{\chi_n}}+\ldots$$

quand $\frac{\chi_{n+1}}{n\chi_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissent indéfiniment avec n, et que $\lim \frac{\psi_n}{\chi_n} = 1$ pour $n = \infty$.

Deuxième exemple. — Au lieu de faire intervenir le mode de décroissance des coefficients de fx, on peut faire intervenir le mode de croissance des exposants.

Considérons

$$f = a_0 + a_1 x^{\varpi_1} + \ldots + a_n x^{\varpi_n} + \ldots, \tag{16}$$

où $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ sont des entiers croissants ou non, positifs ou négatifs.

Supposons $X < 1$, ou, plus exactement, $X = \frac{1}{1+\varepsilon'}$, ε' fini. On a $T = 1$,

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}}\left[a_{n+1} + a_{n+2}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+2}-\varpi_{n+1}} + \ldots\right].$$

Il suffira d'abord, d'après (7), qu'on ait

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}},$$

ce qui a lieu si

$$2\,|\,a_{n+1}\,| < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}} \tag{17}$$

avec

$$\left|\frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right|\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+i+1}-\varpi_{n+i}} \leqq k \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{18}$$

Cette dernière condition (18) est vérifiée quel que soit $X < 1$, pour n et l assez grands, dès que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \frac{\varpi_n}{\varpi_{n+1}} \leqq \mu \qquad \begin{pmatrix}\mu \text{ fini quel que} \\ \text{soit } n\end{pmatrix}, \tag{18 bis}$$

$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n}$ croissant indéfiniment avec n. Nous supposerons qu'il en soit ainsi : la série (16) est alors convergente pour $x < 1$.

Quant à la première (17) elle devient

$$2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} |a_{n+1}| < \frac{1}{2q_l^{\varpi_n}},$$

ou

$$4q_l^{\varpi_n} |a_{n+1}| < \left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{\varpi_{n+1}}.$$

Or

$$\frac{q_l}{p_l} \geqq 1 + \varepsilon,$$

ε étant fini, il suffit donc qu'on ait

$$4q_l^{\varpi_n} |a_{n+1}| < (1 + \varepsilon)^{\varpi_{n+1}},$$

ou

$$4q^{\psi_l \varpi_n} |a_{n+1}| < (1 + \varepsilon)^{\varpi_{n+1}}.$$

Si

$$(1 + \varepsilon)^\beta = q \qquad (\beta \text{ fini}),$$

il suffira qu'on ait

(19) $$4|a_{n+1}| < (1 + \varepsilon)^{\varpi_{n+1} - \beta\varpi_n\psi_l},$$

pour que (18) ait lieu.

D'autre part

$$|h| < \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}},$$

et, pour que (9) soit impossible, il suffira qu'on ait

$$\left|\frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}}\right|^\alpha < \frac{\alpha!}{4\mathrm{M}\, q^{\psi_l \varpi_n}},$$

ou

$$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha} > 4q^{\psi_l\varpi_n}\mathrm{M},$$

(20) $$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha-\psi_l\varpi_n} > 4\mathrm{M}, \qquad \alpha \geqq 1,$$

ce qui a toujours lieu dès que $\psi_{l+1} - \psi_l\varpi_n$ croît indéfiniment avec n.

Il suffira de prendre $n = l$, $\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n^2}$ croissant indéfiniment avec n.

$\lim \frac{\psi_n}{\varpi_n} = 1$ pour $n = \infty$ et $|a_n| \leq \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-1}}$ pour que les conditions (18), (18 *bis*), (19) et (20) soient vérifiées.

En effet, (19) et (20) ont lieu, (18 *bis*) donne

$$|a_{n+1}| \leq \mu \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} |a_n| \qquad \text{ou} \qquad 1 \leq \mu |a_n|,$$

condition qui est toujours vérifiée pour $\mu = 1$. D'où cette conclusion :

Corollaire II. — La fraction

$$\frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \frac{\alpha_2}{q^{\psi_2}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}} + \ldots < 1,$$

où q est entier, et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des entiers $\neq 0$ et $< q$ en valeur absolue, n'est solution d'aucune des équations

$$f = a_0 + a_1 x^{\varpi_1} + \ldots + a_n x^{\varpi_n} + \ldots = 0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant des entiers positifs ou négatifs, lorsque $\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n^2}$ croît indéfiniment avec n, que $\lim \frac{\psi_n}{\varpi_n} = 1$ pour $n = \infty$ et que $|a_n| \leq \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-1}}$. La série f est alors toujours convergente pour $x < 1$.

III.

Considérons maintenant une série procédant suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x

$$(21) \qquad f_1 = \theta_0 + \sum \theta_n x^{\varpi_n} + \sum \frac{\eta_n}{x^{\chi_n}},$$

convergente dans le domaine où se trouve compris X, l'origine étant un pôle ou un point singulier essentiel de f_1.

Dans le cas où l'origine est un pôle, il suffit de multiplier par une certaine puissance de x pour ramener l'équation $f_1 = 0$ à celle déjà traitée.

Nous nous contenterons donc de considérer le cas où f_1 a, à l'origine, un point singulier essentiel.

Alors on peut encore établir pour l'équation $f_1 = 0$ un théorème analogue au théorème I.

En effet, posons

$$f_1 = \varphi_n + \psi_{n_1} + R_n + S_{n_1}, \tag{22}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_n &= \theta_0 + \sum_1^n \theta_n x^{\varpi_n}, \\ \psi_{n_1} &= \sum_1^{n_1} \frac{\tau_{1n}}{x^{\chi_n}}, \end{aligned} \right. \tag{23}$$

on aura

$$\left| \psi_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| = \frac{A}{T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}} \geq \frac{1}{T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}, \tag{24}$$

T étant le dénominateur commun à $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \tau_{11}, \ldots, \tau_{1n_1}$. On pourra, en effet, supposer A, qui est entier, $\neq 0$: car si $R_n + S_{n_1} = 0$, $R_{n+1} + S_{n_1}$ et $R_n + S_{n_1+1}$ sont $\neq 0$.

Prenons $\theta_{n+1}, \ldots, \tau_{1n_1+1}, \ldots$ assez petits pour que

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}; \tag{25}$$

on aura

$$f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) > \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}. \tag{26}$$

Supposons que X soit racine de $f_1 = 0$ et de ses $\alpha - 1$ premières dérivées. On aura, si $h = \frac{p_l}{q_l} - X$,

$$f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = f_1(X + h) = \frac{h^\alpha}{\alpha !}\left[f_1^\alpha(X) + \varepsilon\right],$$

et, pour h assez petit,

$$|f_1^\alpha(X) + \varepsilon| < \lambda |f_1^\alpha(X)|,$$

λ étant fini,

$$|h|^{\alpha} > \left| f_1\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \frac{\alpha!}{\lambda f_1^{(\alpha)}(\mathrm{X})} \right|,$$

(27) $$|h| > \frac{\alpha!}{2\lambda \mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}} |f_1^{(\alpha)}(\mathrm{X})|}.$$

Quels que soient $\varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_{n_1}, p_l$ et q_l, on pourra prendre ψ_{l+1} assez grand pour que $|h|^{\alpha}$ soit $<$ le second membre. On en conclut :

Théorème II. — *Soit*

(21) $$f_1(x) = \theta_0 + \sum \theta_n x^{\varpi_n} + \sum \frac{\eta_{n_1}}{x^{\chi_{n_1}}}$$

une série rationnelle ayant un point singulier essentiel à l'origine ($\varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_n$ *étant des entiers croissants,* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}, \ldots,$ *des nombres rationnels*), *la série étant convergente dans le domaine où se trouve la quantité*

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \sum \frac{\alpha_l}{q^{\psi_l}},$$

X *étant un nombre rationnel ou non, exprimé dans le système de numération de base* q (ψ_l *étant un entier positif croissant,* α_l *un entier positif ou négatif* $< q$ *en valeur absolue*); *soit* $\frac{p_l}{q_l}$ *la fraction irréductible obtenue en s'arrêtant dans* X *au terme d'indice* l, $\theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}, \varpi_1, \ldots, \varpi_n, \chi_1, \ldots, \chi_{n_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \psi_1, \ldots, \psi_l$ *étant absolument quelconques, si l'on prend* θ_{n+1} *et* η_{n_1+1} *assez petits pour qu'on ait*

(25) $$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{R}_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \mathrm{S}_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \\ &\quad = \theta_{n+1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\varpi_{n+1}} + \ldots + \eta_{n_1+1}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{\chi_{n_1+1}} + \ldots < \frac{1}{2\mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}, \end{aligned} \right.$$

ce qui est toujours possible (T *étant le dénominateur commun à* $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$), X *ne pourra être racine de* $fx = 0$ *que si*

(27) $$\left| \mathrm{X} - \frac{p_l}{q_l} \right|^{\alpha} > \frac{\alpha!}{4\mathrm{T} q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}} \mathrm{M}},$$

(*α désignant l'ordre de multiplicité de la racine* X, M *un nombre fini convenablement choisi*). *Par suite, on peut toujours prendre* ψ_{l+1} *assez grand pour que* X *ne soit pas racine de* $fx = 0$ (¹).

On peut trouver un corollaire analogue au corollaire I du théorème I.

Prenons $\theta_n = \frac{a_n}{t_n}$, $\tau_n = \frac{b_n}{l_n}$, t_n divisant t_{n+1}; l_n divisant l_{n+1}, a_n et b_n restant finis et $\neq 0$ en général. $\varpi_n = \chi_n = n$. Supposons encore que l'on prenne

$$(28)\qquad R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) < \frac{1}{2\mathrm{T}q_l^{\varpi_n}p_l^{\chi_{n_1}}},$$

d'après (25). On a

$$R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{t_{n+2}}\frac{p_l}{q_l} + \ldots\right) < 2\,|u_{n+1}|$$

dès que

$$(29)\qquad \mathrm{D}\left|\frac{p_l}{q_l}\frac{t_{n+i}}{t_{n+i+1}}\right| \leq k < \frac{1}{2},$$

$\left(\text{D désignant le maximum du rapport } \left|\frac{a_{n+i+1}}{a_{n+i}}\right|\right)$;

$$S_{n_1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = \left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{n_1+1}\left(\frac{b_{n_1+1}}{l_{n_1+1}} + \frac{b_{n_1+2}}{l_{n_1+2}}\frac{q_l}{p_l} + \ldots\right) < 2\,|v_{n_1+1}|$$

(¹) On remarquera que ce qui précède reste vrai quand $\theta_1 = \ldots = \theta_n = \ldots = 0$, pourvu que l'on suppose $\varpi_n = 0$ dans (25) et (27). On arriverait ainsi à des propriétés complètement analogues à celles du paragraphe précédent, soit en ce qui concerne les coefficients τ, soit en ce qui concerne les exposants χ.

On remarquera encore que la série f_1 conserve sa forme quand on y change x en $\frac{1}{x}$. On pourra en conclure que, sous des conditions analogues, $f_1 = 0$ n'admet pas de solutions de la forme $\frac{1}{X}$: nous n'insistons pas.

Enfin on pourra supposer les θ entiers et $X < 1$, ou les τ entiers et $X > 1$. Les raisonnements à faire sont suffisamment indiqués par ceux du corollaire II du théorème I et ceux du § III.

dès que

(30) $$\Delta\left|\frac{q_l}{p_l}\frac{t_{n_1+i}}{t_{n_1+i+1}}\right| \leqq k < \frac{1}{2}$$

$\left(\Delta \text{ désignant le maximum du rapport } \left|\frac{b_{n_1+i+1}}{b_{n_1+i}}\right|\right)$.

Dès lors (28) a lieu dès que

$$|u_{n+1}| + |v_{n+1}| < \frac{1}{4 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}},$$

ou

(31) $$\left|\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{n+1}\right| + \left|\frac{b_{n_1+1}}{t_{n_1+1}}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^{n_1+1}\right| < \frac{1}{4 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_{n_1}}}.$$

Ceci posé, prenons $n_1 = n$, $t_n = l_n$ [1]; on a

$$\frac{p_l}{q_l} < 2X', \qquad \frac{q_l}{p_l} < 2X',$$

en désignant par X' la plus grande des quantités X, $\frac{1}{X}$. Il suffira *a fortiori* qu'on ait

$$\frac{|a_{n+1}| + |b_{n+1}|}{t_{n+1}}(2X')^{n+1} < \frac{1}{4 t_n q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_n}},$$

$$t_{n+1} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{n+1} 4 t_n q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_n},$$

ou, en remarquant que

$$p_l = \left(\frac{p_l}{q_l}\right) q_l < 2X' q_l, \qquad q_l = q^{\psi_l},$$

(32) $$t_{n+1} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{n+1} 4 t_n q^{\psi_l(\varpi_n + \chi_n)} (2X')^{\chi_n}.$$

---

[1] Si $\psi_{n-1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_{n-1}\left(\frac{p_l}{q_l}\right) = 0$, $\psi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) + \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right)$ ne peut être nul que si $\frac{a_n}{t_n}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^n + \frac{b_n}{t_n}\left(\frac{q_l}{p_l}\right)^n = 0$, ce qui est impossible pour n et l assez grands, puisque $\left(\frac{p_l}{q_l}\right)^n$ croît ou décroît indéfiniment avec n et que $t_n = l_n$. On pourra donc toujours supposer ici n tel que $A > 0$ dans (24).

Cette condition remplace ici la condition (25). Si elle a lieu, il suffira, pour que X ne soit pas racine de $f_1 = 0$, d'après (27), qu'on ait

$$\left| X - \frac{p_l}{q_l} \right|^{\alpha} < \frac{\alpha!}{4 T q_l^{\varpi_n} p_l^{\chi_n} M},$$

α et M étant finis. Ici

$$\left| X - \frac{p_l}{q_l} \right| \vee \frac{1}{q^{\psi_{l+1}-1}}, \qquad T = t_n;$$

il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}} < \frac{\alpha!}{4 t_n q_l^{\varpi_n} \left(\frac{p_l}{q_l}\right)^{\chi_n} M q_l^{\chi_n}},$$

ou, *a fortiori*,

$$(33) \qquad 4 t_n q^{\psi_l \varpi_n + \chi_n} (2X)^{\chi_n} M < \alpha!\, q^{\alpha\psi_{l+1}-\alpha}.$$

Cette condition remplace ici la condition (27).

Prenons, par exemple,

$$l = n = \varpi_n = \chi_n, \qquad t_n = r^{\rho_n}, \qquad r \text{ entier.}$$

(32) donne

$$r^{\rho_{n+1}} > (|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{2n+1}\, 4 r^{\rho_n} q^{2n\psi_n},$$

ou

$$r^{\rho_{n+1}-\rho_n} q^{-2n\psi_n} > 4(|a_{n+1}| + |b_{n+1}|)(2X')^{2n+1},$$

et (33) donne

$$\alpha!\, q^{\alpha\psi_{n+1}-\alpha} > 4 r^{\rho_n} q^{2n\psi_n} (2X')^n M,$$

ou

$$q^{\alpha\psi_{n+1}-\alpha-2n\psi_n} r^{-\rho_n} > \frac{4M}{\alpha!}(2X')^n.$$

Il suffira de poser $r = q^{\lambda_1}$ (λ_1 fini) et

$$\left.\begin{array}{l} q^{\lambda_1 \rho_{n+1} - \rho_n - 2n\psi_n} \geq q^{n\nu} \\ q^{\psi_{n+1} - 2n\psi_n - \lambda\rho_n} \geq q^{n\nu} \end{array}\right\} \qquad (\nu \text{ fonction croissante de } n).$$

c'est-à-dire

$$(34)\qquad \begin{cases} \lambda_1(\rho_{n+1}-\rho_n)-2n\psi_n \geqq nv, \\ \psi_{n+1}-2n\psi_n-\lambda\rho_n \quad \geqq nv, \end{cases}$$

où λ_1 est fini.

Quel que soit λ_1 il suffira de prendre $\lim \frac{\psi_n}{\rho_n} = 1$ pour $n=\infty$, $\frac{\rho_{n+1}}{n\rho_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissant infiniment avec n pour que (34) ait lieu. Nous obtenons ainsi ce corollaire :

Corollaire. — La fraction

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q^{\psi_n}} + \ldots,$$

où X_1 et q sont des entiers et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs $\leqq q-1$ en valeur absolue, n'est solution d'aucune des équations

$$0 = f_1 x = \ldots + \frac{b_n}{r^{\rho_n} x^n} + \ldots + \frac{b_1}{r^{\rho_1} x} + a_0 + \frac{a_1 x}{r^{\rho_1}} + \ldots + \frac{a_n x^n}{r^{\rho_n}} + \ldots,$$

quand $\frac{\rho_{n+1}}{n\rho_n}$, $\frac{\psi_{n+1}}{n\psi_n}$ croissent indéfiniment avec n et que $\lim \frac{\psi_n}{\rho_n} = 1$ pour $n = \infty$ (a_i, b_j, r étant des entiers finis $\neq 0$ en général, ρ_n et ψ_n des entiers $\neq 0$).

IV.

Les idées qui précèdent paraissent avoir une portée encore plus générale que nous ne l'avons indiqué. D'abord elles s'appliquent aux équations algébriques : X et $\frac{1}{X}$, plus généralement leurs puissances rationnelles ou une fonction algébrique à coefficients entiers de X (Liouville ne l'a indiqué que pour X) ne peuvent être racines d'une équation algébrique quand ψ_l croît suffisamment vite. Mais il y a des équations transcendantes, en nombre indéfini, pour lesquelles on peut obtenir des résultats analogues. On peut même dire qu'un théorème

analogue au théorème I a lieu, dans un domaine donné, pour l'équation la plus générale $f_2 x = 0$ dont le premier membre admet une dérivée et a ses coefficients rationnels.

En effet, si

$$\frac{p_l}{q_l} = X + h,$$

et si X est racine d'ordre α de multiplicité non rationnelle de $f_2 X$

$$\left| f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| = \left| \frac{h^\alpha}{\alpha!} [f_2^\alpha(X) + \varepsilon]^2 \right| \leqq \frac{h^\alpha}{\alpha!} \lambda | f_2^\alpha(X) |,$$

$$|h^\alpha| \geqq \frac{\alpha!}{\lambda} \left| \frac{f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)}{f_2^\alpha(X)} \right|.$$

Or $f_2\left(\frac{p_l}{q_l}\right)$ est parfaitement déterminé quand l est donné. Donc h a une limite inférieure, par suite ψ_{l+1} une limite supérieure. Il resterait à classer les quantités X par rapport aux fonctions f_2. En considérant certaines catégories convenablement choisies de fonctions f_2, on pourra obtenir des catégories correspondantes de quantités X. Ce qui précède constitue une application de cette idée.

D'autre part, les méthodes des premiers paragraphes s'étendent aux racines imaginaires des équations algébriques ou transcendantes, résultat que Liouville n'a indiqué que pour les équations algébriques.

Les extensions pour les équations considérées aux § II et III sont immédiates : il suffit de remplacer A par $A + Bi$ dans (5) ; on a encore

$$(5\ bis) \qquad \left| \varphi_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| = \left| \frac{A + Bi}{T q_l^{\varpi_n}} \right| \geqq \frac{1}{T q_l^{\varpi_n}}.$$

Il suffira de prendre

$$(7\ bis) \qquad \left| R_n\left(\frac{p_l}{q_l}\right) \right| < \frac{1}{2 T q_l^{\varpi_n}},$$

pour que (8) subsiste ; (9) subsiste également, par suite le théorème I.

De même pour le théorème II. Nous n'insisterons pas davantage.

Nous croyons utile de mettre en lumière une conséquence importante des résultats établis dans notre Note : les nombres algébriques réels ou imaginaires et ceux qui sont des solutions des équations considérées aux théorèmes I et II jouissent de cette propriété curieuse que le nombre des zéros de la partie fractionnaire réelle ou imaginaire qui suit le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif $\neq 0$ de cette partie est limité en fonction de n, quelle que soit la base du système de numération. On en conclut cette conséquence :

Il existe, et c'est là un fait bien remarquable, une infinité de nombres réels ou imaginaires qui, quel que soit le système de numération dans lequel on les exprime, n'ont, après le $n^{\text{ième}}$ chiffre significatif $\neq 0$ qu'un nombre de zéros limité en fonction de n, quel que soit n.

Cette existence n'était pas évidente *a priori*.

V.

Des considérations de même nature s'appliquent aux nombres X représentés par un développement en fraction continue

$$(1\ bis)\qquad X = \gamma + \cfrac{1}{\gamma_1 + \cfrac{1}{\gamma_2 + \dots}}.$$

Désignons par $\frac{p_l}{q_l}$ la réduite de rang l : on a

$$p_l q_{l+1} - p_{l+1} q_l = (-1)^l,$$

$$\left|\frac{p_l}{q_l} - X\right| < \frac{1}{q_l q_{l+1}},$$

$$q_{l+1} = \gamma_l q_l + q_{l-1}.$$

Si γ_l est suffisamment grand par rapport à q_l, $\frac{1}{q_l q_{l+1}}$ sera beaucoup plus petit que q_l. X sera donc égal à $\frac{p_l}{q_l}$ + une certaine fraction très

petite par rapport à $\frac{1}{q_l}$ et sera alors un nombre analogue à ceux que nous avons considérés dans les trois premiers paragraphes; il jouit des mêmes propriétés.

On peut d'ailleurs se dispenser de passer par l'intermédiaire de ces paragraphes et raisonner directement : on serait encore conduit à des théorèmes analogues aux théorèmes I et II.

Par exemple, le théorème I subsiste : on pourra toujours prendre q_l assez grand pour que X ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

Faisons application au premier exemple considéré dans le § II; (12) devient

(12 *bis*) $$t_{n+1} > 4 t_n q_l^n (2X)^{n+1} |a_{n+1}|.$$

De plus

$$|h| < \frac{1}{q_l q_{l+1}}.$$

Il suffit que (12 *bis*) ait lieu ainsi que

$$\frac{\alpha!}{4 t_n q_l^n M} > \frac{1}{q_l^\alpha q_{l+1}^\alpha},$$

ou

(13 *bis*) $$q_{l+1} > 4 t_n q_l^{n-\alpha} \frac{M}{\alpha!},$$

M étant fini.

Prenant $l = n$, $t_n = r^{\lambda_n}$, il suffira évidemment de poser $q_n = q^{\psi_n}$ pour que le corollaire I subsiste.

On raisonnerait de même pour le théorème II.

VI.

Enfin, on peut étendre les considérations qui précèdent à d'autres modes de représentation des nombres que ceux de la forme (1) et (1 *bis*).

Soient

$$(35)\qquad q_1, q_2, q_3, \ldots$$

une suite d'entiers. On pourra écrire

$$X = X_1 + \frac{\varepsilon_1}{q_1}, \qquad |\varepsilon_1| < q_1,$$

X_1 étant le plus grand entier contenu dans X ou l'entier immédiatement supérieur; puis

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2},$$

$|\alpha_1|$ étant le plus grand entier contenu dans ε_1 ou l'entier immédiatement supérieur, et ayant le signe de ε_1; on aura

$$\frac{\alpha_1 q_2 + \varepsilon_2}{q_1 q_2} = \frac{\varepsilon_1}{q_1},$$

$$\varepsilon_2 = q_2(\varepsilon_1 - \alpha_1),$$

et ε_2 pourra être pris $< q_2$ en valeur absolue si les signes de ε_1 et α_1 sont convenables. Nous supposerons qu'il en soit ainsi.

En continuant de la sorte, on mettra évidemment X sous la forme

$$(36)\qquad X = X_1 + \frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\alpha_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{q_1 q_2 q_n} + \ldots.$$

(35) sera la *base du système de numération généralisé* considéré, (36) la représentation du nombre dans ce système. En prenant

$$q_1 = q_2 = \ldots,$$

on retrouve évidemment les systèmes de numération ordinaires.

Quand on se donne l'ordre des nombres q_1, q_2, ... et les signes successifs de α_1, α_2, ..., à chaque nombre X correspond un mode unique de représentation sous la forme (36).

Il est bien évident, dès lors, si les $|\alpha_i|$ sont limités, que le théorème I subsistera sous la seule condition de remplacer q^{ψ_l} par q_1, $q_2 \ldots q_l$. Il suffira de prendre q_{l-1} assez grand pour que X ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

Le théorème II subsistera évidemment aussi et l'on aura des corollaires analogues à ceux que nous avons indiqués.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME VII.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME VII DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

29319 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

